制御工学

Lecture 2

本資料には不特定多数者には配布が禁止されている著作権で保護された映像、資料を許された範囲で引用している。

本講義の受講者、および、特にクルモフが許可した者以外への配布は犯罪に問われるので強く禁止する。

2026年度 講義予定 –シラバス通り–

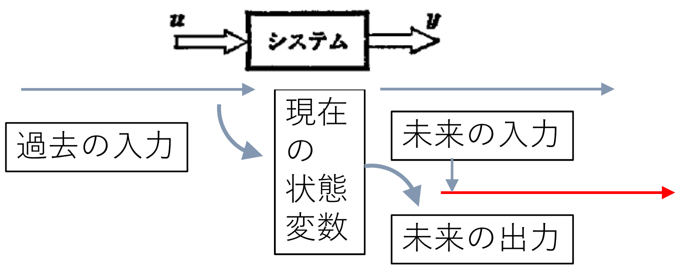
回	開講	内容	教科書
1	4/15	復習、講義の予定、制御系の性能	
2	4/22	状態方程式とシステム応答	1章
3	5/09	行列論	2章
4	5/12	線形時不変システムと状態推移行列	3.1～3.2
5	5/19	線形時不変システムの安定性	3.3
6	5/26	等価変換	4.2、4.3
7	6/03	可制御正準形式、可観測正準形式とその応用	4.1、4.3.2、4.3.3
8	6/10	中間試験1	1章～4章
9	6/17	レギュレータの設計	5.1
10	6/24	同一次元オブザーバの設計	5.2
11	7/01	定常偏差とシステムの型	6.1
12	7/08	中間試験2	6.2
13	7/15	サーボシステムの設計（その1）	6.2
14	7/22	サーボシステムの設計（その2）	7.1
15	7/29	最適レギュレータの設計	プリント
16	8/05	演習	1章～7章

講義予定

- 状態方程式とは
- 微分方程式→伝達関数
- 微分方程式→状態方程式
- 伝達関数→状態方程式
- 状態方程式→伝達関数
- 伝達関数→微分方程式→状態方程式（一般化）
- 線形時不変システム（状態方程式）の応答

状態変数とは

過去の入力をまとめて表す。
未来の出力が、現在の状態変数と、未来の入力で決まる。



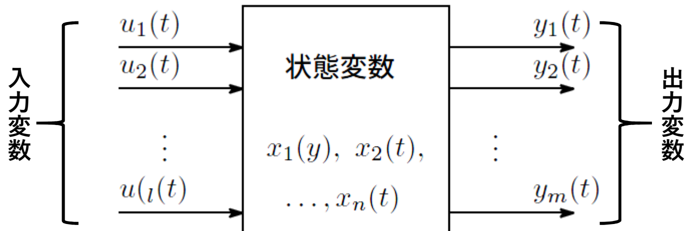
状態方程式の一般形

状態方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$

出力方程式 $\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t)$

制御系

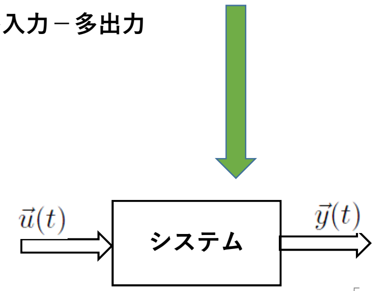
状態方程式の利点：多入力、多出力系を表すことができる



多入力－多出力

$$
\begin{aligned}
\text{入力変数}\vec{u}(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_l(t) \end{bmatrix}^T \\
\text{出力変数}\vec{y}(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_m(t) \end{bmatrix}^T \\
\text{状態変数}\vec{x}(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{状態方程式：}\quad \dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \\
\text{出力方程式:：}\quad \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t)
\end{aligned}
$$

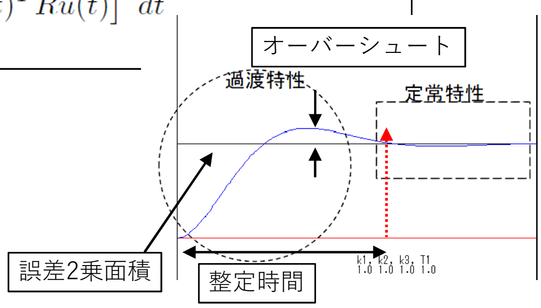


5

状態方程式の利点

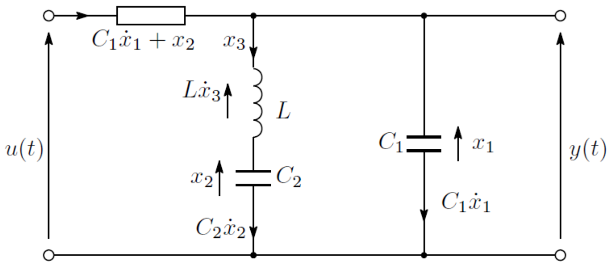
1. 多入力、多出力系を表すことができる。
2. 初期値の影響が表せる。
3. 安定性判定が固有値計算で出来る。
4. 過渡応答の計算が指数関数で出来る。
5. 可制御、可観測が定義できる。
6. システムの非可制御、非可観測の部分も表現できる
7. 最適レギュレータが設計できる→誤差2乗面積：最小

$$
J = \int_0^\infty \left[\vec{x}(t)^T Q \vec{x}(t) + \vec{u}(t)^T R \vec{u}(t) \right] \, dt
$$



6

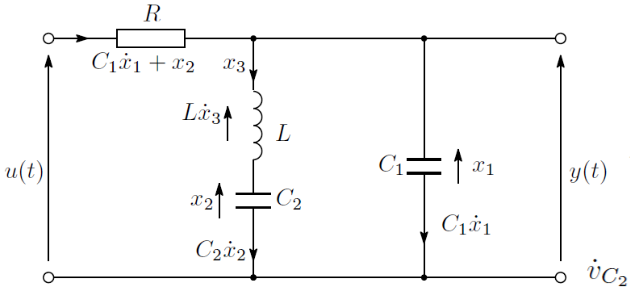
電気システムのモデル（教科書 4 ページ）



コンデンサ	$i(t) = C\dot{v}(t)$,	(または $v(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)\,d\tau + v(0)$)
抵　抗	$v(t) = Ri(t)$	R: 抵抗
コイル	$v(t) = L\dot{i}(t)$	L: インダクタンス

7

電気システムのモデル（教科書 4 ページ）



$$
\begin{aligned}
i_L(t) &= C_2\dot{v}_{C_2}(t) & (1)\\
L\dot{i}_L + v_{C_2}(t) &= v_{C_1}(t) & (2)\\
R(i_L(t) + C_1\dot{v}_{C_1}(t)) + v_{C_1}(t) &= u(t) & (3)
\end{aligned}
$$

(1) を (3)、(1) を (2) に代入し、

$$\dot{v}_{C_2}(t) = \frac{1}{RC_2}u(t) - \frac{1}{RC_2}v_{C_1}(t) - \frac{C_1}{C_2}\dot{v}_{C_1}(t) \quad (4)$$

$$LC_2\ddot{v}_{C_2}(t) + v_{C_2}(t) = v_{C_1}(t) \quad (5)$$

(4) を (5) に代入する。

$$\frac{L}{R}\dot{u}(t) - \frac{L}{R}\dot{v}_{C_1}(t) - LC_1\ddot{v}_{C_1}(t) + \int\left(\frac{1}{RC_2}u(t) - \frac{1}{RC_2}v_{C_1}(t) - \frac{C_1}{C_2}\dot{v}_{C_1}(t)\right)dt = v_{C_1}(t) \quad (6)$$

微分

$$\frac{L}{R}\ddot{u}(t) - \frac{L}{R}\ddot{v}_{C_1}(t) - LC_1\dddot{v}_{C_1}(t) + \frac{1}{RC_2}u(t) - \frac{1}{RC_2}v_{C_1}(t) - \frac{C_1}{C_2}\dot{v}_{C_1}(t) = \dot{v}_{C_1}(t) \quad (7)$$

(7) 中に v_{C_1} を y

$$\dddot{y}(t) + \frac{1}{RC_1}\ddot{y}(t) + \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}\dot{y}(t) + \frac{1}{RLC_1C_2}y(t) = \frac{1}{RC_1}\ddot{u}(t) + \frac{1}{RLC_1C_2}u(t)$$

8

電気システムのモデル ⇒ 伝達関数

$$\dddot{y}(t)+\frac{1}{RC_1}\ddot{y}(t)+\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}\dot{y}(t)+\frac{1}{RLC_1C_2}y(t)=\frac{1}{RC_1}\ddot{u}(t)+\frac{1}{RLC_1C_2}u(t)$$

⇓ ラプラス変換

$$\left(s^3+\frac{1}{RC_1}s^2+\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}s+\frac{1}{RLC_1C_2}\right)Y(s) = \left(\frac{1}{RC_1}s^2+\frac{1}{RLC_1C_2}\right)U(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{RC_1}s^2+\frac{1}{RLC_1C_2}}{s^3+\frac{1}{RC_1}s^2+\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}s+\frac{1}{RLC_1C_2}}$$

$$G(s)=\frac{LC_2s^2+1}{LRC_1C_2s^3+LC_2s^2+R(C_1+C_2)s+1}$$

⇐ 伝達関数

9

微分方程式 → 状態方程式　（その1）

$$\dddot{y}(t)+\frac{1}{RC_1}\ddot{y}(t)+\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}\dot{y}(t)+\frac{1}{RLC_1C_2}y(t)=\frac{1}{RC_1}\ddot{u}(t)+\frac{1}{RLC_1C_2}u(t)$$

代入

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ x_3(t) &= \ddot{y}(t) \end{aligned}}$$

を設定する。

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\
\dot{x}_3(t) &= -\frac{1}{RC_1}x_3(t)-\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}x_2(t)-\frac{1}{RLC_1C_2}x_1(t)+\frac{1}{RC_1}\ddot{u}(t)+\frac{1}{RLC_1C_2}u(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{RLC_1C_2} & -\frac{C_1+C_2}{LC_1C_1} & -\frac{1}{RC_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}\frac{1}{RLC_1C_2} & 0 & \frac{1}{RC_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$$

状態方程式

10

微分方程式 → 状態方程式　（その2）

記述式 (1), (2), (3)→ 状態方程式

$$
\begin{aligned}
i_L(t) &= C_2 \dot{v}_{C_2}(t) \quad (1)\\
L\dot{i}_L + v_{C_2}(t) &= v_{C_1}(t) \quad (2)\\
R(i_L(t) + C_1 \dot{v}_{C_1}(t)) + v_{C_1}(t) &= u(t) \quad (3)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned}
x_1(t) &= v_{C_1}(t)\\
x_2(t) &= v_{C_2}(t)\\
x_3(t) &= i_L(t)
\end{aligned}}
$$

代入

システムの状態変数

$$
\begin{aligned}
x_3(t) &= C_2 \dot{x}_2(t)\\
L\dot{x}_3 + x_2(t) &= x_1(t)\\
R(x_3(t) + C_1 \dot{x}_1(t)) + x_1(t) &= u(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{RC}x_1(t) - \frac{1}{C_1}x_3(t) + \frac{1}{RC_1}u(t)\\
\dot{x}_2(t) &= \frac{1}{C_2}x_3(t)\\
\dot{x}_3(t) &= \frac{1}{L}x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t)
\end{aligned}
$$

次のスライド

微分方程式 → 状態方程式　（その2）<u>のつづき</u>

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)
$$

$$
y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}
$$

状態方程式

伝達関数→微分方程式→状態方程式

伝達関数：初期値＝0→微分方程式→状態方程式

しかし、状態方程式では、初期値の場合も考えることができる。
（ラプラス変換による微分方程式の解き方：初期値が出てくる。

初期値の項

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t) \longrightarrow G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} + \frac{K(s)}{D(s)}$$

$$(D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)$$

13

伝達関数→微分方程式→状態方程式
（分子が定数）

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}$$

$$\begin{aligned} (s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1) Y(s) &= b_0 U(s) \leftarrow \text{Laplace 逆変換} \\ \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) &= b_0 u(t) \end{aligned}$$

14

状態変数の定義:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) \quad = \quad b_0 u(t)$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= x_1 \\
\frac{dy(t)}{dt} &= x_2 = \dot{x}_1 \\
\frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= x_3 = \dot{x}_2 \\
\vdots &= \vdots \\
\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} &= x_n = \dot{x}_{n-1} \\
\dot{x}_n &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n + b_0 u \\
y(t) &= y = x_1
\end{aligned}$$

必ず状態変数として
何を選ぶか書く

15

行列形式へ書き直す:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

状態方程式

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

出力方程式

16

伝達関数→微分方程式→状態方程式

（分子が多項式）

教科書にはない

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1} \\
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \left(\frac{1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}\right)(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0) \\
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \left(\frac{V(s)}{U(s)}\right)\left(\frac{Y(s)}{V(s)}\right) \quad \leftarrow \quad \text{ダミー変数 } V(s) \text{ を導入} \\
\frac{V(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1)V(s) &= U(s) \quad \leftarrow \quad \text{Laplace 逆変換} \\
\frac{d^n v(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1}v(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dv(t)}{dt} + a_1 v(t) &= u(t)
\end{aligned}
$$

17

$$
\frac{d^n v(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1}v(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dv(t)}{dt} + a_1 v(t) = u(t)
$$

状態変数を定義：

$$
\begin{aligned}
v(t) &= x_1 \\
\frac{dv(t)}{dt} &= x_2 = \dot{x}_1 \\
\frac{d^2 v(t)}{dt^2} &= x_3 = \dot{x}_2 \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
\frac{d^{n-1}v(t)}{dt^{n-1}} &= x_n = \dot{x}_{n-1} \\
\frac{d^n v(t)}{dt^n} &= \dot{x}_n
\end{aligned}
$$

必ず状態変数として
何を選ぶか書く

$$
\dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n + u \qquad (*)
$$

18

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{V(s)} &= b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0 \\
Y(s) &= (b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0)V(s) \leftarrow \text{Laplace 逆変換} \\
y(t) &= b_n \frac{d^n v(t)}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}v(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{dv(t)}{dt} + b_0 v(t) \\
y &= b_n \dot{x}_n + b_{n-1}x_n + \cdots + b_1 x_2 + b_0 x_1 \leftarrow \text{(＊)より } \dot{x}_n \text{ を代入する。} \\
y &= b_n(-a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n + u) + b_{n-1}x_n + \cdots + b_1 x_2 + b_0 x_1
\end{aligned}
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
y = (b_0 - b_n a_1)x_1 + (b_1 - b_n a_2)x_2 + \cdots + (b_{n-1} - b_n a_n)x_n + b_n u
$$

19

行列形式:

教科書にはない

$$
\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

$$
y(t) = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_1 & b_1 - b_n a_2 & \ldots & b_{n-2} - b_n a_{n-1} & b_{n-1} - b_n a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u
$$

20

$b_n = 0$ の場合、出力式：

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

21

伝達関数→微分方程式→状態方程式：**<u>例題</u>**

伝達関数：

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{(s+1)(s+2)}$$

微分方程式：

$$\begin{aligned} (s+1)(s+2)Y(s) &= 3U(s) \\ (s^2+3s+2)Y(s) &= 3U(s) \\ \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) &= 3u(t) \end{aligned}$$

状態変数： $x_1 = y,\ x_2 = \dot{y}$

必ず状態変数として何を選ぶか書く

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 3x_2 + 3u \end{aligned}$$

状態方程式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

22

伝達関数→微分方程式→状態方程式：例題

伝達関数： $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

微分方程式

$$\begin{aligned}(s+1)(s+2)Y(s) &= (s+3)U(s)\\ (s^2+3s+2)Y(s) &= (s+3)U(s)\\ \ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t) &= \dot{u}+3u(t)\end{aligned}$$

状態変数： $x_1 = y,\ x_2 = \dot{y}$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -2x_1-3x_2+\dot{u}+3u\end{aligned}$$

状態方程式

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y &= \begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{aligned}}$$

状態方程式→伝達関数

状態方程式：	$\dot{\vec{x}}(t)$	$=$	$A\vec{x}(t)+B\vec{u}(t)$
出力方程式:：	$\vec{y}(t)$	$=$	$C\vec{x}(t)$

初期値＝０としている

ラプラス変換　状態方程式　$sX(s) = AX(s)+BU(s)$

出力方程式　$Y(s) = CX(s)$

$X(s)$ でまとめる $sX(s)-AX(s) = BU(s) \rightarrow (sI-A)X(s)=BU(s)$

$X(s)$ でまとめる $X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$

出力方程式へ代入 $Y(s) = \{C(sI-A)^{-1}\}BU(s)$

伝達関数<u>行列</u> $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B$

多入力多出力

状態方程式→伝達関数：例題

教科書p.94例題4－5

多入出力システム、

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

においては、伝達関数行列は

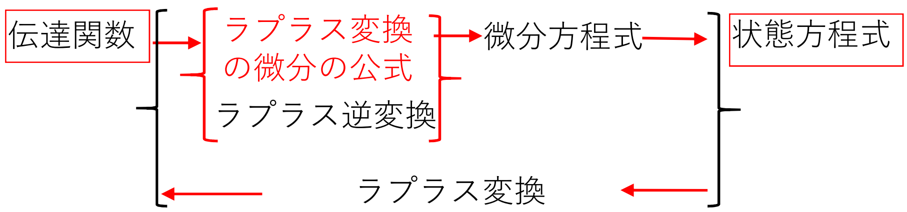
$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 & 1/s^2 \\ 0 & 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 0 & 1/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^3} & \dfrac{3}{s} \\ \dfrac{(s+1)(s+2)}{s^3} & \dfrac{2}{s} \end{bmatrix}$$

25

制御系の表し方

制御対象を表現する方法:2通りある



26

なぜ状態方程式を使うか

1. 伝達関数では、制御系の一部分しか表せない。

2. 状態方程式では、初期状態の影響が表せる。

伝達関数では
必ず初期値=0

3. 多入力、多出力の制御系が容易に表せる。

伝達関数、状態方程式で
表すことのできるのは
線形系のみ

27

講義予定

- 状態方程式とは
- 微分方程式→伝達関数
- 微分方程式→状態方程式
- 伝達関数→状態方程式
- 状態方程式→伝達関数
- 伝達関数→微分方程式→状態方程式(一般化)
- **線形時不変システム(状態方程式)の応答**

28

状態方程式の応答

教科書p.61

状態方程式： $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$

出力方程式:： $\vec{y}(t) = C\vec{x}(t)$

初期値 $\vec{x}(0)$

定数変化法にて解く

同次微分方程式の解：（自由システム） $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) \xrightarrow{解} \vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}(0)$

e^{At} ：**状態推移行列（遷移行列）**

$\vec{u} \equiv 0$ のとき

微分方程式の一般解： $\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}(0) + e^{At}\vec{z}(t),\quad \vec{z}(0) = \vec{0}$

$\vec{x}(t)$を微分して状態方程式に代入する。
状態方程式を満たすように$\vec{z}(t)$を求める。

$$\cancel{Ae^{At}\vec{x}(0)} + \cancel{Ae^{At}\vec{z}(t)} + e^{At}\dot{\vec{z}}(t) = \cancel{Ae^{At}\vec{x}(0)} + \cancel{Ae^{At}\vec{z}(t)} + B\vec{u}(t)$$

$\dot{\vec{z}}(t) = e^{-At}B\vec{u}(t)$ 積分をする。 $\Rightarrow \vec{z}(t) = \int_0^t e^{-A\tau}B\vec{u}(\tau)\,d\tau$

よって、

$$\boxed{\vec{x}(t) = e^{At}\left[\vec{x}(0) + \int_0^t e^{-A\tau}B\vec{u}(\tau)\,d\tau\right] = e^{At}\vec{x}(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}B\vec{u}(\tau)\,d\tau}$$

29

状態方程式の応答

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{x}(t) &= e^{At}\vec{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\vec{u}(\tau)\,d\tau \\ \vec{y}(t) &= Ce^{At}\vec{x}(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\vec{u}(\tau)\,d\tau \end{aligned}}$$

推移行列e^{At} を求める方法？ (4回目の講義)

30