

最適フィードバック

2026年度 講義予定 -シラバス通り-

回	開講	内容	教科書
1	4/15	復習、講義の予定、制御系の性能	
2	4/22	状態方程式とシステム応答	1章
3	5/09	行列論	2章
4	5/13	線形時不変システムと状態推移行列	3.1～3.2
5	5/20	線形時不変システムの安定性	3.3
6	5/27	等価変換	4.2、4.3
7	6/03	可制御正準形式、可観測正準形式とその応用	4.1、4.3.2、 4.3.3
8	6/10	中間試験1	1章～4章
9	6/17	レギュレータの設計	5.1
10	6/24	同一次元オブザーバの設計	5.2
11	7/01	定常偏差とシステムの型	6.1
12	7/08	中間試験2	6.2
13	7/15	サーボシステムの設計(その1)	6.2
14	7/22	サーボシステムの設計(その2)	7.1
15	7/29	最適レギュレータの設計	プリント
16	8/05	演習	1章～7章

最適フィードバックの求め方

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \quad \text{可制御}$$

$$\text{評価関数: } J = \int_0^\infty [\vec{x}(t)^T Q \vec{x}(t) + \vec{u}(t)^T R \vec{u}(t)] dt \quad \text{を最小にする } \vec{u}(t) = ?$$

$$\text{状態フィードバック入力: } \vec{u}(t) = -F\vec{x}(t) \text{ を代入} \quad Q = C^T C$$

$$J = \int_0^\infty [\vec{x}(t)^T (C^T C + F^T R F) \vec{x}(t)] dt$$

$$\text{リャプノフ方程式の講義: } Q = C^T C \rightarrow C^T C + F^T R F; \quad A \rightarrow A - BF$$

$$\text{リャプノフ方程式: } A^T P + PA = -C^T C$$

$$\rightarrow (A - BF)^T P + P(A - BF) = -(C^T C + F^T R F)$$

$$\text{評価関数: } J = \int_0^\infty \frac{d}{dt} (\vec{x}(t)^T P \vec{x}(t)) dt = \vec{x}(t)^T P \vec{x}(t) \Big|_0^\infty = \vec{x}(0)^T P \vec{x}(0)$$

を最小にする F を求める。→ 最適フィードバック

3

最適フィードバックの求め方

$$P \text{ を最小にする } F \rightarrow F = R^{-1} B^T P$$

$$F \text{ を代入} \rightarrow PBR^{-1}B^T P - A^T P - PA - C^T C = 0$$

$$\boxed{PBR^{-1}B^T P - A^T P - PA - Q = 0}$$

行列リカッチ方程式。証明は省略

4

最適フィードバックの求め方: 例題(1)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

初期値: $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$

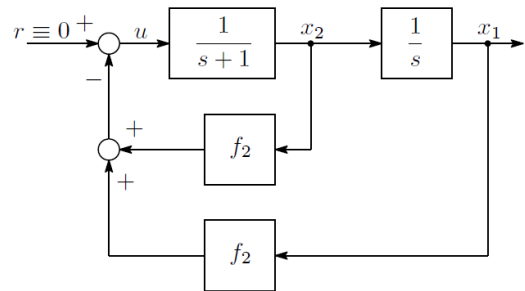
$$u = - \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{f}^T \vec{x}$$

$$\text{評価関数: } J = \int_0^\infty (x_1^2 + u^2) dt$$

リャプノフ方程式の解

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{リャプノフ方程式: } (A - BF)^T P + P(A - BF) &= -(C^T C + F^T W^T W F) \\ (A - \vec{b} \vec{f})^T P + P(A - \vec{b} \vec{f}) &= -(\vec{c}^T \vec{c} + \vec{f}^T r^2 \vec{f}) \end{aligned}$$



5

最適フィードバックの求め方: 例題(2)

$$p_{11} = \frac{1 + f_1 + f_1^2 + f_1^3 + 2f_2 + f_2^2}{2f_1(1 + f_2)}, \quad p_{12} = \frac{1 + f_2^2}{2f_1}, \quad p_{22} = \frac{1 + f_1^2 + f_1 f_2^2}{2f_1(1 + f_2)}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = p_{11} = \frac{1 + f_1 + f_1^2 + f_1^3 + 2f_2 + f_2^2}{2f_1(1 + f_2)}$$

これを最小にするフィードバック係数 f_1, f_2

$$\frac{\partial J}{\partial f_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial f_2} = 0 \rightarrow f_1 = 1, \quad f_2 = \sqrt{3} - 1$$

この値は J を最小にするように求めたが、すばわち、

初期値: $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$

のとき最小となるように求めた。実際には、**任意の初期値** に対して最小となる。

6

最適フィードバックの求め方: 例題(3)

リカッチ方程式を解く

$$PBR^{-1}B^TP - A^TP - PA - Q = 0$$

$$\text{評価関数: } J = \int_0^\infty [\vec{x}(t)^T Q \vec{x}(t) + \vec{u}(t)^T R \vec{u}(t)] dt$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \vec{c}^T \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r = 1$$

リカッチ方程式を構成する。 次のスライド。

7

最適フィードバックの求め方: 例題(4)

リカッチ方程式を構成する。

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$p_{12}^2 - 1 = 0$$

$$p_{12}p_{22} - p_{11} + p_{12} = 0$$

$$p_{22}^2 - 2p_{12} + 2p_{22} = 0$$

$$\longrightarrow P = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} - 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{f} = r^{-1} \vec{b}^T P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} - 1 \end{bmatrix}$$

8

リカッチ方程式の解き方

1. 代数的に床方法
2. 微分方程式

$$\dot{P}(t) = PBR^{-1}B^TP - A^TP - PA - Q$$

終端条件 $P(t_f) = 0$ で解く。

9

例題(5):

例題1について、リカッチ方程式を解く。

係数行列
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^TC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

リカッチ微分方程式 (12.26) へ代入

$$\dot{P}(t) = P(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P(t) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} P(t) - P(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

終端条件 $P(t_f) = 0$ で解く代わりに、

初期条件 $P(0) = 0$ で繰り返し計算 $\dot{P}((n-1)T) \cong \frac{1}{T}(P(nT) - P((n-1)T))$

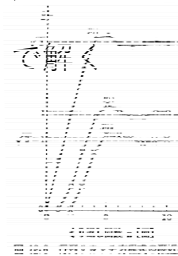
$$P(nT) = P((n-1)T) - T\dot{P}((n-1)T)$$

$$n=1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

図12.6→正しい解 $p_{11} = \sqrt{3}$, $p_{12} = 1$, $p_{22} = \sqrt{3} - 1$

状態フィードバック $u = -[1 \quad \sqrt{3}-1]x$ (4)

フィードバック係数 $k_1 = 1$, $k_2 = \sqrt{3}-1$ (5)



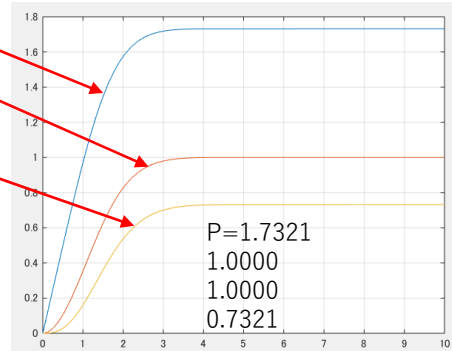
10

例題:

```
% Riccati204_1.m
% 制御工学 教科書P.204 例題1
format compact ; close all ; clear
global A B C
tf=10.0; % 終了時間
A=[0 1;0 -1];
B=[0; 1];
C=[1 0];
% 初期値
P0=zeros(2,2);
p10=P0(1,1);p20=P0(1,2);p30=P0(2,2);
p0=[p10;p20;p30];
[t1,p1]=ode45('Riccati204_1_dot',[0,
tf],p0);
[t1_size,t1_size2]=size(t1);
P=[p1(t1_size,1)
p1(t1_size,2);p1(t1_size,2)
p1(t1_size,3)]
```

```
figure(1)
hold on
plot(t1,p1(:,1))
plot(t1,p1(:,2))
plot(t1,p1(:,3))
hold off;grid on;box on
```

解法2でRiccatiを解く



```
% Riccati204_1_dot.m
function
Riccati_dot=Riccati204_1_dot(t,p)
global A B C
P=[p(1) p(2);p(2) p(3)];
P_dot=P*B'*B'*P-A'*P-P*A-C'*C;
p1_dot=-P_dot(1,1);
p2_dot=-P_dot(1,2);
p3_dot=-P_dot(2,2);
Riccati_dot=[p1_dot;p2_dot;p3_dot];
```

最適フィードバックの求め方: 例題2

ヘリコプタの経度運動モデル:

(G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, 2nd ed., 1990.)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & -0.01 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1.4 & 9.8 & -0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6.3 \\ 0 \\ 9.8 \end{bmatrix} u(t)$$

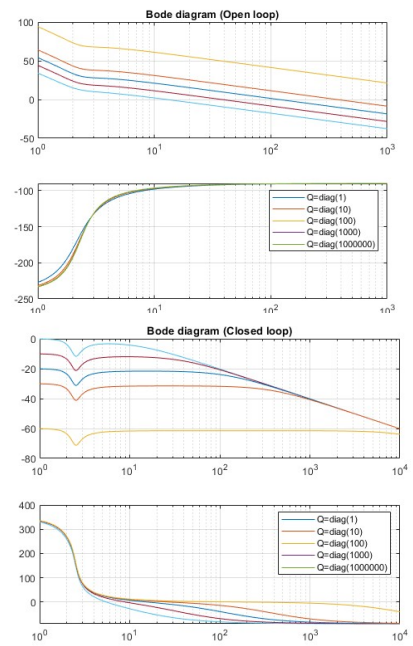
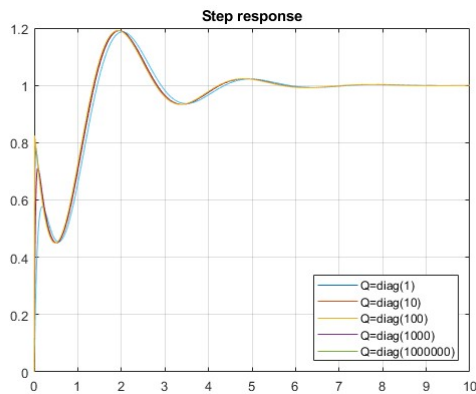
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{9.8s^2 - 4.9s + 61.74}{s^2 + 0.42s^2 - 0.006s + 0.098}$$

 $x_1(t)$: ピッチ角速度、 $x_2(t)$: ピッチ角、 $x_3(t)$: 水平速度 $u(t)$: ロータの傾き (ピッチ角)重み行列 Q 、 R の値による LQR の特性を次のように調べる。

1. $R = r = 1$; $Q = qI$, $q = 1, 10, 100, 1000, 1000000$:cheap control
2. $R = rI$, $r = 1, 10, 100, 1000, 1000000$; $Q = I$:minimum energy control

1. $R = r = 1$; $Q = qI$, $q = 1, 10, 100, 1000, 1000000$:cheap control



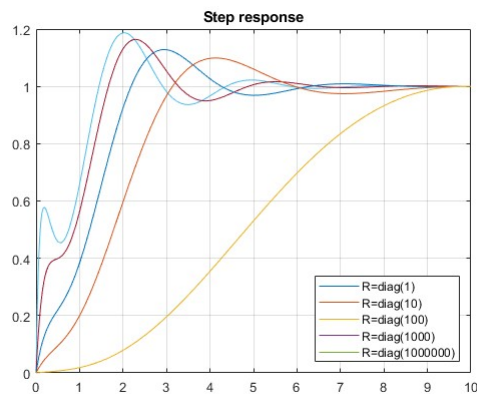
Cheap control

Data for varying q $Q = qI$, $R = r = 1$											
q	Control gain vector			POS	T_r	T_s	T_p	GM	PM	WPC	WGC
1	0.52	4.38	0.99	18.7	1.3	5.2	2.0	−15.0	83.9	2.0	12.8
10	1.12	11.9	3.2	19.1	1.2	5.1	2.0	−22.4	88.3	2.1	37.9
10^2	3.14	35.73	9.98	19.1	1.2	5.1	1.9	−31.6	89.5	2.2	117.6
10^3	9.54	111.15	31.57	19.1	1.2	5.1	1.9	−41.3	89.8	2.2	369.5
10^6	296.3	3489.3	998.4	19.1	1.2	5.0	1.9	−71.2	−	2.2	−

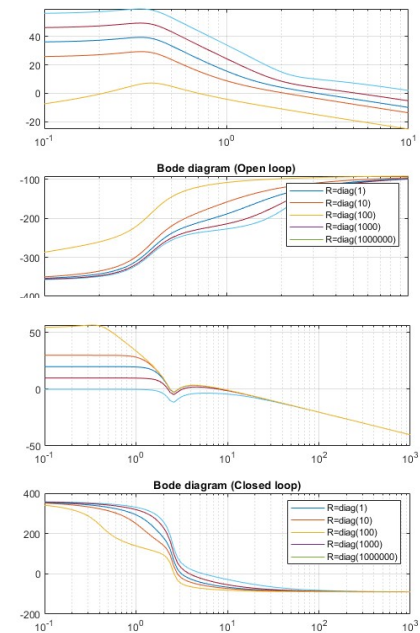
- 制御ゲインは増加し、飽和の原因
- Q の値が変化しても $PM > 80^\circ$
- $GM < 0$ の意味は、システムが不安定になるまでの可能なゲインの降下量

Closed loop poles for varying q $Q = qI$, $R = r = 1$					
q	1	10	10^2	10^3	10^6
Closed loop poles	$-0.73 + 2.15j$	$-0.73 + 2.18j$	$-0.73 + 2.18j$	$-0.73 + 2.18j$	$-0.73 + 2.18j$
	$-0.73 - 2.15j$	$-0.73 - 2.18j$	$-0.73 - 2.18j$	$-0.73 - 2.18j$	$-0.73 - 2.18j$
	-12.0	-36.9	-116.5	-368.4	-11650.3

2. $R = rI$, $r = 1, 10, 100, 1000, 1000000$; $Q = I$: minimum energy control



r 増加 $\rightarrow$ 応答が遅くなり、行き過ぎ量は減



Minimum energy control

Data for varying r $R = rI$, $Q = I$												
r	Control gain vector			POS	T_r	T_s	T_p	GM	PM	WPC	WGC	
1	0.52	4.38	0.99	18.7	1.3	5.2	2.0	-15.0	—	2.0	—	
10	0.39	1.96	0.31	16.4	1.5	4.6	2.3	-11.9	71.3	1.7	5.2	
10^2	0.35	0.98	0.1	12.8	1.8	5.6	3.0	-13.0	61.9	1.1	3.1	
10^3	0.28	0.48	0.03	9.9	2.2	7.8	4.1	-14.2	60.5	0.75	2.1	
10^6	0.09	0.06	0.0003	0.02	5.4	8.8	9.9	-7.2	60.8	0.4	0.7	

- r 増加 $\rightarrow$ 制御ゲイン減
- r 増加 $\rightarrow$ 応答が遅くなり、行き過ぎ量は減

Closed loop poles for varying r $Q = I$, $R = rI$					
r	1	10	10^2	10^3	10^6
Closed loop poles	$-0.73 + 2.15j$	$-0.72 + 1.95j$	$-0.66 + 1.5j$	$-0.54 + 1.05j$	$-0.15 + 0.39j$
	$-0.73 - 2.15j$	$-0.72 - 1.95j$	$-0.66 - 1.5j$	$-0.54 - 1.05j$	$-0.15 - 0.39j$
	-12.0	-4.5	-2.3	-1.4	-0.67

16