

行列論の復習と 線形時不変システムの応答

Lecture 2

2024/4/17

1. 行列理論の復習
2. 状態方程式の復習
3. 線形時不変システム(状態方程式)の応答
4. 状態推移行列の求め方

2024年度 講義予定 -シラバス通り-

回	開講	内容	教科書
1	4/10	復習、講義の予定、制御系の性能	
2	4/17	状態方程式とシステム応答	1章
3	4/24	行列論	2章
4	12/15	線形時不変システムと状態推移行列	3.1~3.2
5	12/18	線形時不変システムの安定性	3.3
6	12/21	等価変換	4.2、4.3
7	1/5	可制御正準形式、可観測正準形式とその応用	4.1、4.3.2、 4.3.3
8	1/11	中間試験	1章~4章
9	1/15	レギュレータの設計	5.1
10	1/18	同一次元オブザーバの設計	5.2
11	1/22	定常偏差とシステムの型	6.1
12	1/25	サーボシステムの設計(その1)	6.2
13	1/29	サーボシステムの設計(その2)	6.2
14	2/1	最適レギュレータの設計	7.1
15	2/5	演習	プリント
16	2/8	期末試験	1章~7章

行列の復習

1. 行列、ベクトルの定義(教科書 p. 20~21)
2. 行列の和算、乗算(教科書 p. 21~22)
3. 行列式(教科書 p. 24)

行展開 (任意 i 番目の行 $1 \leq i \leq n$ について展開) :

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

列展開 (任意 j 番目の列 $1 \leq j \leq n$ について展開) :

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

M_{ij} : 第 k 行と l 列を省いた $(n-1) \times (n-1)$ 小行列の行列式

3. 行列式(つづき)

- $A(n \times n)$ 、 $B(n \times n)$ のとき、 $|AB| = |A||B|$
- $A(n \times n)$ のとき、 $|aA| = a^n |A|$
- λ_i ($i = 1, \dots, n$) は A の固有値とし、 $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \rightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \neq 0$ ($\forall i$)

4. 逆行列

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} \longleftarrow \text{adj}(A) : A \text{ の余因子行列}$$

$$\text{adj}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} M_{ji}$$

- $A(n \times n)$ 、 $B(n \times n)$ のとき、 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(aA)^{-1} = \frac{A^{-1}}{a}$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

行列の復習

4. 逆行列(例題)

次の行列の逆行列を求めよ。 $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

答: $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$

$$|A| = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

4. 逆行列(例題)つづき

$$\begin{aligned} \text{adj}(A) &= \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 8 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ -5 & 15 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ -5 & 15 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{AA^{-1} = I}$$

必ず確認すること

5. 固有値、固有ベクトルと対角化

行列 A の特性方程式 (characteristic equation)

$$|sI - A| = s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_2 s + a_1 = 0$$

$$s = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \leftarrow A \text{ の固有値 (eigenvalue)}$$

$$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \quad (\lambda_i I - A)\vec{v}_i = 0 \quad \vec{v}_i \text{ は固有ベクトル}$$

$$T = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_n]$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \leftarrow \text{モード行列}$$

5. 固有値、固有ベクトルと対角化(つづき)

次の行列 A の固有値と
固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

答：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -2 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & -5 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 4)$$

より固有値： $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -4$

$$((-1)I - A) = 0 \text{ より、} -1 \text{ の固有ベクトル } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T$$

$$((-2)I - A) = 0 \text{ より、} -2 \text{ の固有ベクトル } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T$$

$$((-4)I - A) = 0 \text{ より、} -4 \text{ の固有ベクトル } \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

対角化は固有ベクトルを並べた固有ベクトル行列を求めて行う。

固有ベクトル行列 T とその逆行列 T^{-1} は次のスライドへ。

$T^{-1}AT$ を計算すれば、対角行列となる。

5. 固有値、固有ベクトルと対角化(つづき)

答：

固有値 $\lambda=-4$ の
固有ベクトルの計算

固有ベクトルは
 $\vec{v}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ でも
 $\vec{v}_3 = [0 \ 0 \ 6]$ でも
どちらでも良い。
 $\vec{v}_3 = [0 \ 0 \ 1]$ とする。
(モード行列の
逆行列が計算し易い
ため。

$\vec{x}_3 = [0 \ 0 \ 0]$ は不可。

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{連立1次方程式} \\ \text{階段行列にして求める} \end{array}$$

$\lambda = 4 \rightarrow$ 固有ベクトル

$$(\lambda I - A)\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 + 3 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -4 + 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -v_{31} - 2v_{32} = 0 \\ v_{31} - 4v_{32} = 0 \\ -5v_{32} = 0 \end{cases}$$

$v_{31} = 0, v_{32} = 0, v_{33}$: 何でもよい

行列の対角化: 求めた、行列 A の固有値と固有ベクトルを使って、行列 T を求め、行列 A を対角化する。

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}; \quad T^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T^{-1}AT &= -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となるはずであるが、計算して確かめよ。

5. 固有値、固有ベクトルと対角化(つづき)

行列の対角化：行列 A の固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$

行列 $\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$

↑ 固有ベクトル
を並べた

対角行列になる $T^{-1}AT =$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

対角化：何に使うか

(1) 状態方程式の解を求めるとき

(2) 制御系をモードに分解する 教科書 p. 97

6. 2次形式と正定関数、正定行列

教科書45-48頁

2次形式

$$V(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$$

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= V(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_2x_3 + 2fx_1x_3 \end{aligned}$$

2次形式のAは
正方行列
かつ
対称行列

例題：

次の2次形式を2次形式に書き下せ

$$V(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

例題：

次の2次形式を2次形式に書き下せ

$$V(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

答：

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 + 0x_3 \\ -4x_1 + 10x_2 + 6x_3 \\ 0x_1 + 6x_2 + 18x_3 \end{bmatrix} \\ &= (2x_1^2 - 4x_1x_2) + (-4x_1x_2 + 10x_2^2 + 6x_2x_3) + (6x_2x_3 + 18x_3^2) \\ &= 2x_1^2 + 10x_2^2 + 18x_3^2 - 8x_1x_2 + 12x_2x_3 \end{aligned}$$

6. 2次形式と正定関数、正定行列(つづき)

2次形式 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$: 正定値 \Leftrightarrow すべての $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ について、 $V(\mathbf{x}) > 0$

A : 正定行列 $\Leftrightarrow V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ が正定値

\mathbf{x}^T : 転置

判定方法(1) 主小行列式 > 0

判定方法(2) 正定値の条件 : A の全ての固有値 > 0

2次形式 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$: 準正定値 \Leftrightarrow すべての $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ について、 $V(\mathbf{x}) \geq 0$

A : 準正定値行列 $\Leftrightarrow V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ が準正定値 (準正定関数)

判定方法(1) 全ての小行列式 ≥ 0

判定方法(2) 準正定値の条件 : A の全ての固有値 ≥ 0

例題：

次の行列 A の固有値を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix}$$

この行列は正定行列か？

先頭主座小行列式を計算する

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -4 & 0 \\ -4 & \boxed{10} & 6 \\ 0 & 6 & \boxed{18} \end{bmatrix} \text{主小行列式} \quad \begin{array}{l} 2 > 0, \\ \left| \begin{array}{cc} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{array} \right| = 4 > 0, \\ \left| \begin{array}{ccc} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 18 \end{array} \right| = 0 \end{array}$$

→準正定

固有値を計算する。

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 & 0 \\ 4 & \lambda - 10 & -6 \\ 0 & -6 & \lambda - 18 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 10 & -6 \\ -6 & \lambda - 18 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 0 & \lambda - 18 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - 30\lambda^2 + 184\lambda \end{aligned}$$

根=固有値=0, 8.5969, 21.4031 → 0の固有値と、正の固有値

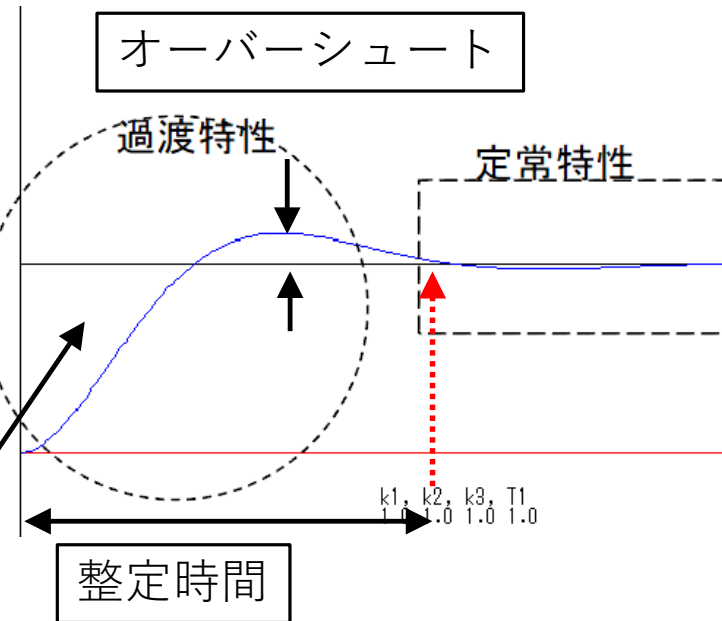
→準正定値（準正定行列）

2次形式は何に使うか(1)

どんな過渡応答が良いか

1. 整定時間：短い
 2. オーバーシュート：小さい
 3. 誤差2乗面積：小さい
- 最適レギュレータ

誤差2乗面積



誤差2乗面積を表すのに使う
教科書 p 157

$$J = \int_0^{\infty} [\vec{x}(t)^T Q \vec{x}(t) + \vec{u}(t)^T R \vec{u}(t)] dt$$

2次形式は何に使うか(2)

リアプノフの安定定理

$$\frac{dX}{dt} = f(X,t) \quad \text{に対し, 次の5つの条件を満たし}$$

連続な一階偏導関数をもつ連続な実数値スカラー関数 $V(X)$ が存在すれば, 平衡点は大域的安定である。

$$V(0)=0$$

$V(X)$ は正定値

$$V(x) = x^T P x$$

$$\|X\| \rightarrow \infty \text{のとき} \quad V(X) \rightarrow \infty$$

$\dot{V}(X)$ は準負定値

$\dot{V}(X)$ は恒等的に0ではない

まとめ

行列論の復習:

1. 行列、ベクトルの定義(教科書 p. 20~21)
2. 行列の和算、乗算(教科書 p. 21~22)
3. 行列式(教科書 p. 24)
4. 逆行列(教科書 p. 25~26)
5. 固有値、固有ベクトルと対角化(教科書 p. 34~38)
6. 2次形式と正定関数、正定行列(教科書 p. 45~46)