行列論の復習と 線形時不変システムの応答

Lecture 2

2025/4/23

1. 行列理論の復習
2. 状態方程式の復習
3. 線形時不変システム(状態方程式)の応答
4. 状態推移行列の求め方

1

2025年度 講義予定 –シラバス通り–

回	開講	内容	教科書
1	4/16	復習、講義の予定、制御系の性能	
2	4/23	状態方程式とシステム応答	1章
3	5/07	行列論	2章
4	5/14	線形時不変システムと状態推移行列	3.1～3.2
5	5/21	線形時不変システムの安定性	3.3
6	5/28	等価変換	4.2、4.3
7	6/04	可制御正準形式、可観測正準形式とその応用	4.1、4.3.2、4.3.3
8	6/11	中間試験	1章～4章
9	6/18	レギュレータの設計	5.1
10	6/25	同一次元オブザーバの設計	5.2
11	7/02	定常偏差とシステムの型	6.1
12	7/09	サーボシステムの設計(その1)	6.2
13	7/16	サーボシステムの設計(その2)	6.2
14	7/23	最適レギュレータの設計	7.1
15	7/30	演習	プリント
16	8/06	期末試験	1章～7章

2

行列の復習

1. 行列、ベクトルの定義（教科書 p. 20～21）
2. 行列の和算、乗算（教科書 p. 21～22）
3. 行列式（教科書 p. 24）

行展開 (任意 i 番目の行 $1 \leq i \leq n$ について展開)：

$$\boxed{|A| \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}}$$

列展開 (任意 j 番目の列 ($1 \leq j \leq n$ について展開)：

$$\boxed{|A| \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}}$$

M_{ij}：第 k 行と l 列を省いた $(n-1) \times (n-1)$ 小行列の行列式

3. 行列式（つづき）

- $A(n \times n)$、$B(n \times n)$ のとき、$|AB| = |A||B|$
- $A(n \times n)$ のとき、$|aA| = a^n|A|$
- λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ は A の固有値とし、$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ $\rightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \neq 0$ $(\forall i)$

4. 逆行列

$$\boxed{A^{-1} \quad = \quad \frac{\mathrm{adj}(A)}{|A|}}$$

adj(A)：A の余因子行列

$$\mathrm{adj}(a_{ij}) \quad = \quad (-1)^{i+j} M_{ji}$$

- $A(n \times n)$、$B(n \times n)$ のとき、$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(aA)^{-1} = \dfrac{A^{-1}}{a}$
- $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

行列の復習

4. 逆行列（例題）

次の行列の逆行列を求めよ。 $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

答： $A^{-1} = \dfrac{\mathrm{adj}(A)}{|A|}$

$$|A| = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

4. 逆行列（例題）つづき

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 8 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ -5 & 15 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{|A|} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ -5 & 15 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{AA^{-1} = I}$$

必ず確認すること

5. 固有値、固有ベクトルと対角化

行列 Aの特性方程式（characteristic equation）

$$
\begin{aligned}
|sI-A| &= s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots + a_2 s + a_1 = 0 \\
s &= \lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ \leftarrow\ A \text{ の固有値（eigenvalue）}
\end{aligned}
$$

$$
A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \quad (\lambda_i I - A)\vec{v}_i = 0 \qquad \vec{v}_i \text{ は固有ベクトル}
$$

$$
T = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}
$$

$$
T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Leftarrow \textbf{モード行列}
$$

5. 固有値、固有ベクトルと対角化（つづき）

次の行列A の固有値と
固有ベクトルを求めよ。

$$
A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}
$$

答：

$$
|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda+3 & -2 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & -5 & \lambda+4 \end{bmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+4)
$$

より固有値：$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -4$

$((-1)I - A) = 0$ より、-1 の固有ベクトル$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T$

$((-2)I - A) = 0$ より、-2 の固有ベクトル$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T$

$((-4)I - A) = 0$ より、-4 の固有ベクトル$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

対角化は固有ベクトルを並べた固有ベクトル行列を求めて行う。
固有ベクトル行列$\boldsymbol{T}$とその逆行列$\boldsymbol{T}^{-1}$は次のスライドへ。
$\boldsymbol{T^{-1}AT}$を計算すれば、対角行列となる。

5. 固有値、固有ベクトルと対角化（つづき）

答：
固有値λ=-4の
固有ベクトルの計算

固有ベクトルは
$\vec{v}_3$ =[0　0　1]ᵀでも
$\vec{v}_3$ =[0　0　6]でも
どちらでも良い。
$\vec{v}_3$ =[0　0　1]とする。
（モード行列の
逆行列が計算し易い
ため。
$\boldsymbol{x}_3$ =[0　0　0] は不可。

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

連立1次方程式
階段行列にして求める

$\lambda = 4 \to$ 固有ベクトル

$$(\lambda I - A)\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -4+3 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -4+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{3_1} \\ v_{3_2} \\ v_{3_3} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{3_1} \\ v_{3_2} \\ v_{3_3} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -v_{3_1} - 2v_{3_2} = 0 \\ v_{3_1} - 4v_{3_2} = 0 \\ -5v_{3_2} = 0 \end{cases}$$

$v_{3_1} = 0,\ v_{3_2} = 0,\ v_{3_3}$: 何でもよい

行列の対角化: 求めた、行列Aの固有値と固有ベクトルを使って、行列$\boldsymbol{T}$を求め、行列Aを対角化する。

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix};\ T^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

となるはずであるが、計算して確かめよ。

5. 固有値、固有ベクトルと対角化(つづき)

行列の対角化:行列Aの固有ベクトル$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$
行列$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$
↑固有ベクトル　対角行列になる$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$
を並べた

対角化:何に使うか
(1) 状態方程式の解を求めるとき
(2) 制御系をモードに分解する　教科書 p. 97

6. 2次形式と正定関数、正定行列

教科書45-48頁

2次形式

$$V(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$$

$$V(\vec{x}) = V(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_2x_3 + 2fx_1x_3$$

2次形式のAは
正方行列
かつ
対称行列

例題:
次の2次形式を2次形式に書き下せ

$$V(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

例題：
次の2次形式を2次形式に書き下せ

$$V(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

答：

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 + 0x_3 \\ -4x_1 + 10x_2 + 6x_3 \\ 0x_1 + 6x_2 + 18x_3 \end{bmatrix} \\ &= (2x_1^2 - 4x_1x_2) + (-4x_1x_2 + 10x_2^2 + 6x_2x_3) + (6x_2x_3 + 18x_3^2) \\ &= 2x_1^2 + 10x_2^2 + 18x_3^2 - 8x_1x_2 + 12x_2x_3 \end{aligned}$$

6. 2次形式と正定関数、正定行列（つづき）

2次形式 $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ ：正定値⇔すべての$\boldsymbol{x} \neq 0$について、$V(\boldsymbol{x}) > 0$

A：正定行列⇔$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$が正定値

$\boldsymbol{x}^T$：転置

判定方法(１) 主小行列式>0

判定方法(2) 正定値の条件：Aの全ての固有値>0

2次形式 $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ ：準正定値⇔すべての$\boldsymbol{x} \neq 0$について、$V(\boldsymbol{x}) \geqq 0$

A：準正定値行列⇔$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$が準正定値（準正定関数）

判定方法(１) 全ての小行列式≧0

判定方法(2) 準正定値の条件：Aの全ての固有値≧ 0

教科書45-46頁

例題：
次の行列A の固有値を求めよ。
この行列は正定行列か？

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix}$$

先頭主座小行列式を計算する

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix}$$ 主小行列式

$$2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 18 \end{vmatrix} = 0$$

→準正定

固有値を計算する。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 4 & 0 \\ 4 & \lambda-10 & -6 \\ 0 & -6 & \lambda-18 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-10 & -6 \\ -6 & \lambda-18 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 0 & \lambda-18 \end{vmatrix}$$

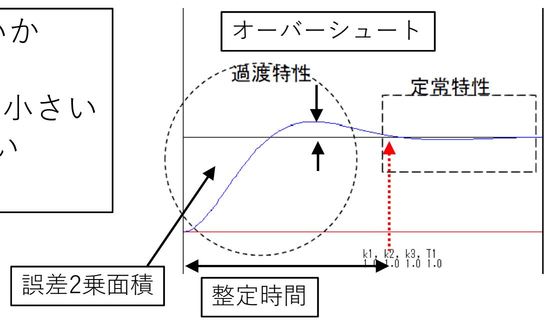
$$= \lambda^3 - 30\lambda^2 + 184\lambda$$

根=固有値=0, 8.5969, 21.4031→ 0の固有値と、正の固有値
→準正定値（準正定行列）

15

2次形式は何に使うか(1)

どんな過渡応答が良いか
1.整定時間：短い
2.オーバーシュート：小さい
3.誤差2乗面積：小さい
→最適レギュレータ



誤差2乗面積を表すのに使う
教科書 p 157

$$J = \int_0^\infty \boxed{\vec{x}(t)^T Q \vec{x}(t) + \vec{u}(t)^T R \vec{u}(t)} \, dt$$

16

2次形式は何に使うか(2)

リアプノフの安定定理

$$\frac{dX}{dt} = f(X,t)$$ に対し，次の5つの条件を満たし

連続な一階偏導関数をもつ連続な実数値スカラ関数V(X)が存在すれば，平衡点は大域的安定である。

$V(0)=0$

V(X)は正定値 ← $\boldsymbol{V(x) = x^T P x}$

$\|X\| \to \infty$のとき　$V(X) \to \infty$

$\dot{V}(X)$　は準負定値

$\dot{V}(X)$　は恒等的に0ではない

17

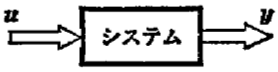
制御理論

	古典制御	現代制御	新しい制御
理論構成	1940年頃	1960年頃*	1980年頃から
制御系表現	伝達関数 ➡	状態方程式	既約分解*
モデリング	周波数応答	システム同定	展開： ロバスト制御 適応制御 非線形制御 モデル予測制御
制御系の性質	―	可観測、可制御	
安定性判別	特性方程式、 ラウスフルビッツ、 根軌跡法、 ナイキスト	固有値、 リャプノフ関数	
フィードバック制御	補償器、PID制御	状態フィードバック、 最適レギュレータ、 状態観測器	
講義	制御工学A	制御工学B	

18

状態変数とは

過去の入力をまとめて表す。
未来の出力が、現在の状態変数と、未来の入力で決まる。



過去の入力

現在の状態変数

未来の入力

未来の出力

u ⇒ 伝達関数 ⇒ y

u ⇒ 状態方程式 ⇒ y

どちらも制御系を表す

制御系

状態方程式の利点
多入力、多出力系を表すことができる

入力 l個

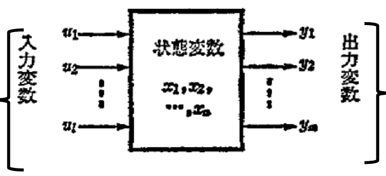


図 9.1　多入力-多出力系

出力 m個

入力変数　$\boldsymbol{u}=[u_1\ u_2\ \cdots\ u_l]^T$

出力変数　$\boldsymbol{y}=[y_1\ y_2\ \cdots\ y_m]^T$

状態変数　$\boldsymbol{x}=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T$

状態方程式　$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$

出力方程式　$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$

制御系の表し方

制御対象を表現する方法:2通りある

伝達関数 → ラプラス変換の微分の公式 / ラプラス逆変換 → 微分方程式 → 状態方程式

状態方程式 → ラプラス変換 → 伝達関数

なぜ状態方程式を使うか

1. 伝達関数では、制御系の一部分しか表せない。

2. 状態方程式では、初期状態の影響が表せる。

伝達関数では
必ず初期値=0

3. 多入力、多出力の制御系が容易に表せる。

伝達関数、状態方程式で
表すことのできるのは
線形系のみ

なぜ状態方程式を使うか

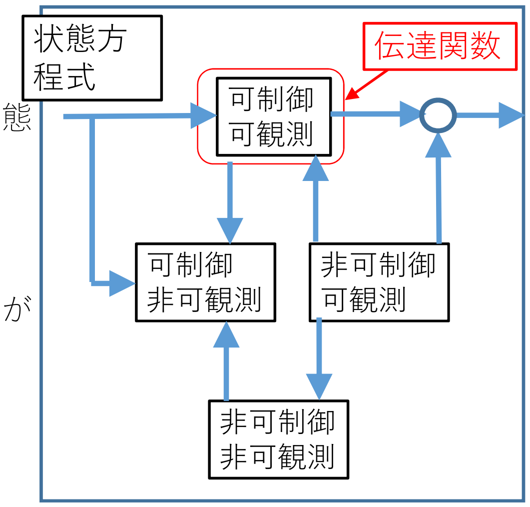
1. 伝達関数では、制御系の一部分しか表せない。

2. 状態方程式では、初期状態の影響が表せる。

伝達関数では必ず初期値=0

3. 多入力、多出力の制御系が容易に表せる。

伝達関数、状態方程式で表すことのできるのは線形系のみ



伝達関数→微分方程式→状態方程式

伝達関数：<u>初期値＝0</u>→微分方程式→状態方程式

しかし、状態方程式では、初期値の場合も考えることができる。
（ラプラス変換による微分方程式の解き方：<u>初期値が出てくる。</u>

初期値の項

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t) \longrightarrow G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} + \frac{K(s)}{D(s)}$$

$$(D(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)$$

伝達関数→微分方程式→状態方程式
（分子が定数）

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}$$

$$\begin{aligned} (s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1)Y(s) &= b_0 U(s) \leftarrow \text{Laplace 逆変換} \\ \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) &= b_0 u(t) \end{aligned}$$

状態変数の定義：

$$\boxed{\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = b_0 u(t)}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x_1 \\ \frac{dy(t)}{dt} &= x_2 = \dot{x}_1 \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= x_3 = \dot{x}_2 \\ \vdots &= \vdots \\ \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} &= x_n = \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n + b_0 u \\ y(t) &= y = x_1 \end{aligned}$$

必ず状態変数として何を選ぶか書く

行列形式へ書き直す：

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

状態方程式

出力方程式

27

伝達関数→微分方程式→状態方程式

(分子が多項式)

教科書にはない

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1} \\
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \left(\frac{1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}\right)(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0) \\
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \left(\frac{V(s)}{U(s)}\right)\left(\frac{Y(s)}{V(s)}\right) \quad \leftarrow \quad \text{ダミー変数 } V(s) \text{ を導入} \\
\frac{V(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1} \\
(s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1)V(s) &= U(s) \quad \leftarrow \quad \text{Laplace 逆変換} \\
\frac{d^n v(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1}v(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dv(t)}{dt} + a_1 v(t) &= u(t)
\end{aligned}
$$

28

状態変数を定義：

$$\boxed{\frac{d^n v(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dv(t)}{dt} + a_1 v(t) \quad = \quad u(t)}$$

$$\begin{aligned}
v(t) &= x_1 \\
\frac{dv(t)}{dt} &= x_2 = \dot{x}_1 \\
\frac{d^2 v(t)}{dt^2} &= x_3 = \dot{x}_2 \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\
\frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} &= x_n = \dot{x}_{n-1} \\
\frac{d^n v(t)}{dt^n} &= \dot{x}_n
\end{aligned}$$

必ず状態変数として
何を選ぶか書く

$$\boxed{\dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n + u} \quad (27)$$

29

$$\boxed{\dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n + u} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{V(s)} &= b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0 \\
Y(s) &= (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0) V(s) \leftarrow \text{Laplace 逆変換} \\
y(t) &= b_n \frac{d^n v(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{dv(t)}{dt} + b_0 v(t) \\
y &= b_n \dot{x}_n + b_{n-1} x_n + \cdots + b_1 x_2 + b_0 x_1 \leftarrow (27) \text{ より } \dot{x}_n \text{ を代入する。} \\
y &= b_n(-a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n + u) + b_{n-1} x_n + \cdots + b_1 x_2 + b_0 x_1
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$y = (b_0 - b_n a_1) x_1 + (b_1 - b_n a_2) x_2 + \cdots + (b_{n-1} - b_n a_n) x_n + b_n u$$

30

行列形式（状態方程式）：

教科書にはない

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_1 & b_1 - b_n a_2 & \ldots & b_{n-2} - b_n a_{n-1} & b_{n-1} - b_n a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u$$

31

$b_n = 0$ の場合、出力式：

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

32

伝達関数→微分方程式→状態方程式：例題

伝達関数： $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{(s+1)(s+2)}$

微分方程式：

$$\begin{aligned}(s+1)(s+2)Y(s) &= 3U(s)\\ (s^2+3s+2)Y(s) &= 3U(s)\\ \ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t) &= 3u(t)\end{aligned}$$

状態変数： $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$

必ず状態変数として何を選ぶか書く

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 3x_2 + 3u\end{aligned}$$

状態方程式

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}u\\ y &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{aligned}}$$

伝達関数→微分方程式→状態方程式：例題

伝達関数： $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

微分方程式

$$\begin{aligned}(s+1)(s+2)Y(s) &= (s+3)U(s)\\ (s^2+3s+2)Y(s) &= (s+3)U(s)\\ \ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t) &= \dot{u}+3u(t)\end{aligned}$$

状態変数： $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 3x_2 + \dot{u} + 3u\end{aligned}$$

状態方程式

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y &= \begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{aligned}}$$

状態方程式→伝達関数

$$\text{状態方程式：}\quad \dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$$
$$\text{出力方程式:：}\quad \vec{y}(t) = C\vec{x}(t)$$

初期値＝０としている

ラプラス変換　状態方程式　$sX(s) = AX(s) + BU(s)$

出力方程式　$Y(s) = CX(s)$

$X(s)$ でまとめる $sX(s) - AX(s) = BU(s) \rightarrow (sI - A)X(s) = BU(s)$

$X(s)$ でまとめる $X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$

出力方程式へ代入 $Y(s) = \{C(sI - A)^{-1}\}BU(s)$

伝達関数行列 $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B$

多入力多出力

第2回の講義資料参照

35

例題

状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} u$$

出力方程式

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & -2 \end{bmatrix},\quad B = b = \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix},\quad C = [1 \quad 0],$$

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$. に代入

$$G(s) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ K & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{s(s+2)+K} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -K & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}$$
$$= \frac{K}{s^2+2s+K}$$

36

状態方程式の応答

教科書p.61

$$\boxed{\begin{array}{lrcl}\text{状態方程式：} & \dot{\vec{x}}(t) & = & A\vec{x}(t)+B\vec{u}(t) \\ \text{出力方程式:：} & \vec{y}(t) & = & C\vec{x}(t)\end{array}}$$

初期値 $\vec{x}(0)$

定数変化法にて解く

同次微分方程式の解： $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) \xrightarrow{\text{解}} \vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}(0)$

e^{At} **：状態推移行列（遷移行列）**

（自由システム）

$\vec{u} \equiv 0$ のとき

微分方程式の一般解： $\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}(0) + e^{At}\vec{z}(t),\ \vec{z}(0) = \vec{0}$

$\vec{x}(t)$を微分して状態方程式に代入する。
状態方程式を満たすように$\vec{z}(t)$を求める。

$$\cancel{Ae^{At}\vec{x}(0)} + \cancel{Ae^{At}\vec{z}(t)} + e^{At}\dot{\vec{z}}(t) = \cancel{Ae^{At}\vec{x}(0)} + \cancel{Ae^{At}\vec{z}(t)} + B\vec{u}(t)$$

$\dot{\vec{z}}(t) = e^{-At}B\vec{u}(t)$ 積分をする。 $\Rightarrow$ $\vec{z}(t) = \int_0^t e^{-A\tau}B\vec{u}(\tau)\,d\tau$

よって、

$$\boxed{\vec{x}(t) = e^{At}\left[\vec{x}(0) + \int_0^t e^{-A\tau}B\vec{u}(\tau)\,d\tau\right] = e^{At}\vec{x}(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}B\vec{u}(\tau)\,d\tau}$$

37

状態方程式の応答

$$\boxed{\begin{array}{rcl}\vec{x}(t) & = & e^{At}\vec{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\vec{u}(\tau)\,d\tau \\ \vec{y}(t) & = & Ce^{At}\vec{x}(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\vec{u}(\tau)\,d\tau\end{array}}$$

推移行列 e^{At} を求める方法？ （次のスライド）

38

推移行列 e^{At} を求める方法

推移行列の定義式：$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \cdots$
よりの求め方があるが、とても計算できない。

推移行列の求め方
1. ラプラス逆変換
2. 行列の対角化
3. 数値計算

39

1. 推移行列　e^{At}をラプラス逆変換で求める

$$\boxed{e^{At} = \mathscr{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}}$$

教科書p.67

証明： $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$ を Laplace 変換する。

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{\dot{\vec{x}}(t)\} &= \mathscr{L}\{A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)\} \\ sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ X(s) &= (sI-A)^{-1}\vec{x}(0) + (sI-A)^{-1}BU(s) \end{aligned}$$

$$\vec{x}(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}\vec{x}(0) + \mathscr{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}BU(s)\} \quad (*)$$

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\vec{u}(\tau)\,d\tau \quad (**)$$

$(*)$ と $(**)$ を比較して、

$$\boxed{e^{At} = \underline{\mathscr{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}}}$$

および

$$\mathscr{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}BU(s)\} = \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\vec{u}(\tau)\,d\tau$$

教科書［例題3－3］参照

40

状態方程式の推移行列(演習課題)

方法(1)：　行列 $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}$ の遷移行列

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s & -2\\ 1 & s+3\end{bmatrix}\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 2\\ -1 & s\end{bmatrix}\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{2}{s^2+3s+2}\\ \dfrac{-1}{s^2+3s+2} & \dfrac{s}{s^2+3s+2}\end{bmatrix}\right\}\\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1}+\dfrac{-1}{s+2} & \dfrac{2}{s+1}-\dfrac{2}{s+2}\\ -\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{s+2} & -\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}\right\}\\
&= \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-t}-2e^{-2t}\\ -e^{-t}+e^{-2t} & -2^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

41

2. 推移行列 e^{At} を行列対角化で求める　<u>**教科書p.63**</u>

(1) 状態方程式の行列 A の固有値 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$、固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_n$, モード行列$T$=[$\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_n$]を求める。

(2) モード行列Tとその逆行列T^{-1}を求める。

(3) 行列Aを対角化する

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}=\Lambda$$

(4)公式

証明　$\boxed{e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}}$　　$A=T\Lambda T^{-1}$

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= I+At+\frac{A^2}{2!}t^2+\frac{A^3}{3!}t^3+\cdots+\frac{A^n}{n!}t^n+\cdots\\
&= TT^{-1}+T\Lambda T^{-1}t+\frac{(T\Lambda T^{-1})^2}{2!}t^2+\frac{(T\Lambda T^{-1})^3}{3!}t^3+\cdots+\frac{(T\Lambda T^{-1})^n}{n!}t^n+\cdots\\
&= TT^{-1}+T\Lambda T^{-1}t+\frac{T\Lambda^2T^{-1}}{2!}t^2+\frac{T\Lambda^3T^{-1}}{3!}t^3+\cdots+\frac{T\Lambda^nT^{-1}}{n!}t^n+\cdots\\
&= T\left(I+\Lambda t+\frac{\Lambda^2}{2!}t^2+\frac{\Lambda^3}{3!}t^3+\cdots+\frac{\Lambda^n}{n!}t^n+\cdots\right)T^{-1}=Te^{\Lambda t}T^{-1}
\end{aligned}
$$

(5)Λは対角行列より、$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}$ $\rightarrow$ $e^{\Lambda t}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{e}^{\Lambda t}$から $e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}$を求める

42

推移行列の求め方

方法(2)対角化： 状態方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

の行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ の推移行列を求める。

固有値：$|A - sI| = \begin{vmatrix} -s & 2 \\ -1 & -s-3 \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2) = 0 \quad \rightarrow$

λ=-1、-2

固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow T = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

λ_1=-1のとき $\qquad \lambda_2$=-2のとき

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \Lambda$$

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}}$$

方法(1)で求めた結果と同じ

43