同一次元オブザーバの設計

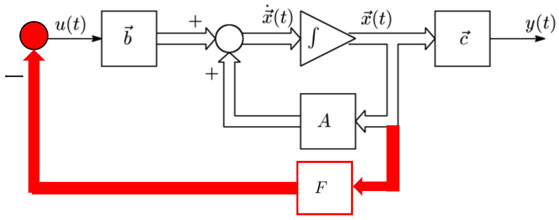
1. オブザーバとは？
2. 同一次元オブザーバの設計

2024年度 講義予定 –シラバス通り–

回	開講	内容	教科書
1	4/10	復習、講義の予定、制御系の性能	
2	4/17	状態方程式とシステム応答	1章
3	4/24	行列論	2章
4	5/08	線形時不変システムと状態推移行列	3.1～3.2
5	5/15	線形時不変システムの安定性	3.3
6	5/22	等価変換	4.2、4.3
7	5/29	可制御正準形式、可観測正準形式とその応用	4.1、4.3.2、4.3.3
8	6/05	中間試験	1章～4章
9	6/12	レギュレータの設計	5.1
10	6/19	同一次元オブザーバの設計	5.2
11	6/26	定常偏差とシステムの型	6.1
12	7/03	サーボシステムの設計（その1）	6.2
13	7/10	サーボシステムの設計（その2）	6.2
14	7/17	最適レギュレータの設計	7.1
15	7/24	演習	プリント
16	7/31	期末試験	1章～7章

オブザーバ（状態観測器）とは

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \\
\vec{y}(t) &= C\vec{x}(t)
\end{aligned}
$$



状態フィードバック$u = -\vec{f}\vec{x}(t)$には状態変数の値 $\vec{x}(t)$が必要

状態変数を観測できない場合や状態変数を測定するセンサが高価な場合！

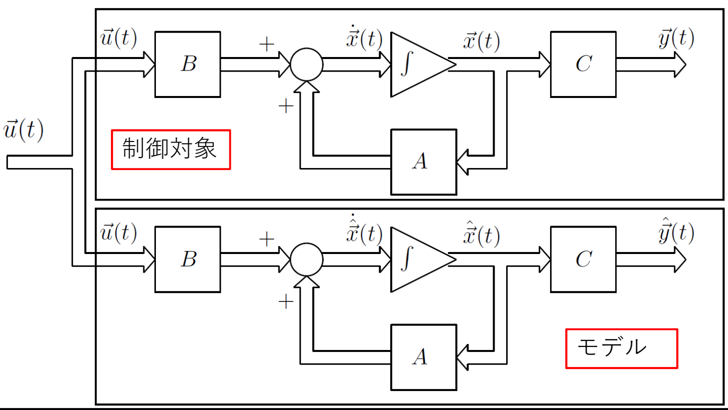
観測（測定）できる入力uと出力yから状態の値を推定する機構

オブザーバ→推定値 $\hat{\vec{x}}(t)$

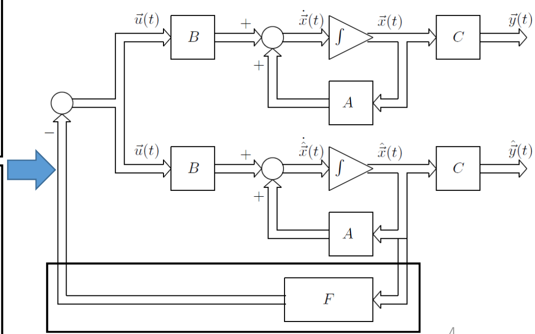
オブザーバ（状態観測器）とは

推定方法**（ダメな例）**：
制御対象と同じモデルを構成する。
欠点：制御対象とモデルの初期値が一致しないと $\vec{x}(t)$ の真値とならない。

$$
\begin{aligned}
e &= \hat{\vec{x}}(t) - \vec{x}(t) \quad \leftarrow \text{ 誤差ベクトル} \\
\dot{e}(t) &= \dot{\hat{\vec{x}}}(t) - \dot{\vec{x}}(t) \\
&= A(\hat{\vec{x}}(t) - \vec{x}(t)) = A\vec{e}(t) \\
\vec{e}(t) &= A\vec{e}(0)
\end{aligned}
$$



状態フィードバックには
状態の推定値を用いる



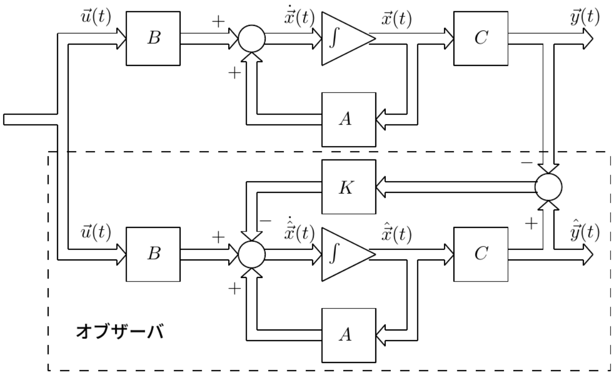
同一次元オブザーバ

$$\dot{\hat{\vec{x}}}(t) = A\hat{\vec{x}}(t) + B\vec{u}(t) + K\hat{\vec{y}}(t) - K\vec{y}(t)$$

$$\boxed{\dot{\hat{\vec{x}}}(t) = A\hat{\vec{x}}(t) + B\vec{u}(t) + K(\hat{\vec{y}}(t) - \vec{y}(t))}$$

同一次元オブザーバ

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)\\ \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}(t) &= \dot{\hat{\vec{x}}}(t) - \dot{\vec{x}}(t)\\ &= (A-KC)\hat{\vec{x}}(t) + KC\vec{x}(t) + \cancel{B\vec{u}(t)} - A\vec{x}(t) - \cancel{B\vec{u}(t)}\\ &= (A-KC)(\hat{\vec{x}}(t) - \vec{x}(t))\\ \dot{\vec{e}}(t) &= (A-KC)\vec{e}(t)\\ \vec{e}(t) &= e^{(A-KC)t}\vec{e}(0) \longleftarrow\end{aligned}$$

$A-KC$ は安定であれば、任意の $\vec{e}(0)$ に対しても $\vec{e}(t) \to 0$

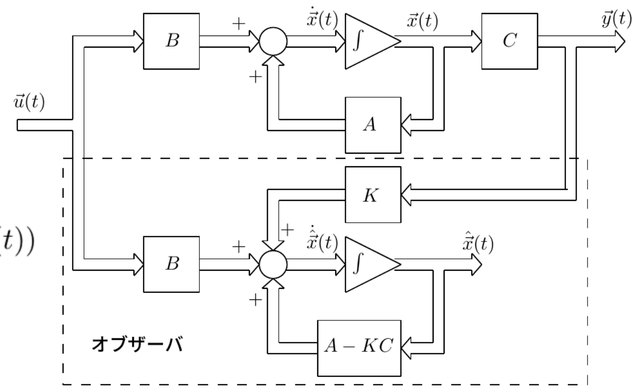
5

同一次元オブザーバ

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)\\ \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t)\\ \dot{\hat{\vec{x}}}(t) &= A\hat{\vec{x}}(t) + B\vec{u}(t) + K\hat{\vec{y}}(t) - K\vec{y}(t)\\ \dot{\hat{\vec{x}}}(t) &= A\hat{\vec{x}}(t) + B\vec{u}(t) + K(\hat{\vec{y}}(t) - \vec{y}(t))\\ \dot{\hat{\vec{x}}}(t) &= A\hat{\vec{x}}(t) + B\vec{u}(t) + K(C\hat{\vec{x}}(t) - C\vec{x}(t))\end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{\hat{\vec{x}}}(t) = (A-KC)\hat{\vec{x}}(t) + B\vec{u}(t) + K\vec{y}(t)}$$

同一次元オブザーバ



6

双対性の定理

教科書p. 90

$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}$
$\vec{y} = C\vec{x}$
可制御の条件：

$$U_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

可観測の条件：

$$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$\dot{\vec{z}} = A^T\vec{z} + C^T\vec{u}$
$\vec{y} = B^T\vec{z}$
可観測の条件:

$$U_o = \begin{bmatrix} B^T \\ B^TA^T \\ B^T(A^T)^2 \\ \cdots \\ B^T(A^T)^{n-1} \end{bmatrix}$$

可制御の条件:

$$U_c = \begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & (A^T)^2C^T & \cdots & (A^T)^{n-1}C^T \end{bmatrix}$$

$(A,\ B)$ 可制御 $\leftrightarrow$ $(B^T,\ A^T)$ 可観測
$(C,\ A)$ 可観測 $\leftrightarrow$ $(A^T,\ C^T)$ 可制御

7

同一次元オブザーバの設計

$(C,\ A)$ 可観測 $\leftrightarrow$ $(A^T,\ C^T)$ 可制御 $\Longrightarrow$ 固有値を$\overbrace{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n}^{\text{任意}}$にする F が存在

定理：可制御⇒行列A-BKの固有値は任意の値に指定可能
⇒状態フィードバックによって、制御系は安定に出来る

前回の定理（教科書p. 116）

$\Downarrow$

$A^T - C^TF^T$の固有値を$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n$にする F が存在

$$(A-KC)^T = A^T - C^TK^T$$

$\Downarrow$

$$(A-KC)^T \overset{\text{同じ固有値}}{\Longleftrightarrow} A^T - C^TK^T$$

$\Downarrow$

よって、$K = F^T$

オブザーバの設計と双対システムのレギュレータの設計と等価

8

同一次元オブザーバの設計

1. 与えられた系の双対系を構成する。
   $\dot{\vec{z}} = A^T\vec{z} + C^T\vec{u}$
   $\vec{y} = B^T\vec{z}$
2. 双対系に対して、次のことを求める。
   (a) 行列 A^T の特性方程式：$|sI - A^T| = s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1$
   (b) 可制御性行列：$U_c = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^{n-1})^T C^T \end{bmatrix}$
   (c) 可制御性準形への変換行列 $T = U_c W$
   (d) 行列 T の逆行列 T^{-1}
3. 与えられたオブザーバの極 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ を用いて、
   $A^T - C^T F$ が満たすべき特性方程式を求める。
   $(s-\gamma_1)(s-\gamma_2)\cdots(s-\gamma_n) = s^n + d_n s^{n-1} + \cdots + d_2 s + d_1$
4. 行列 F を求める：$F = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & \cdots & f_n - a_n \end{bmatrix} T^{-1}$
5. $K = F^T$ にする。
6. オブザーバを構成する：$\dot{\hat{\vec{x}}}(t) = (A - KC)\hat{\vec{x}}(t) + B\vec{u}(t) + K\vec{y}(t)$

オブザーバの設計例

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

に対して、極 $\gamma_1 = -5,\ \gamma_2 = -6$ を持つ同一次元オブザーバを設計せよ。

1. 与えられた系の双対系を構成する。
$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \longleftarrow \dot{\vec{z}} = A^T\vec{z} + C^T\vec{u}$$
2. 双対系に対して、次のことを求める。
   (a) 行列 A^T の特性方程式：$|sI - A^T| = \begin{vmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 + 2s + 1$
   (b) 可制御性行列：$U_c = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   (c) 可制御性準形への変換行列：$T = U_c W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

次のスライド

オブザーバの設計例

(d) 行列 T の逆行列：$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

3. 与えられたオブザーバの極 $\gamma_1 = -5,\ \gamma_2 = -6$ を用いて、$A^T - C^T F$ が満たすべき特性方程式を求める。

   $(s+5)(s+6) = s^2 + 11s + 30$

4. ベクトル $\vec{f}$ を求める：

   $$\vec{f} = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 & d_2 - a_2 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 30-1 & 11-2 \end{bmatrix} T^{-1}$$
   $$= \begin{bmatrix} 29 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 11 \end{bmatrix}$$

5. $\vec{k} = \vec{f}^T = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix}$

6. オブザーバを構成する：$\dot{\hat{\vec{x}}}(t) = (A - \vec{k}\vec{c})\hat{\vec{x}}(t) + B\vec{u}(t) + \vec{k}\vec{y}(t)$ 次のスライド

11

オブザーバの設計例

6. オブザーバを構成する：$\dot{\hat{\vec{x}}}(t) = (A - \vec{k}\vec{c})\hat{\vec{x}}(t) + B\vec{u}(t) + \vec{k}\vec{y}(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix} y$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -12 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix} y}$$

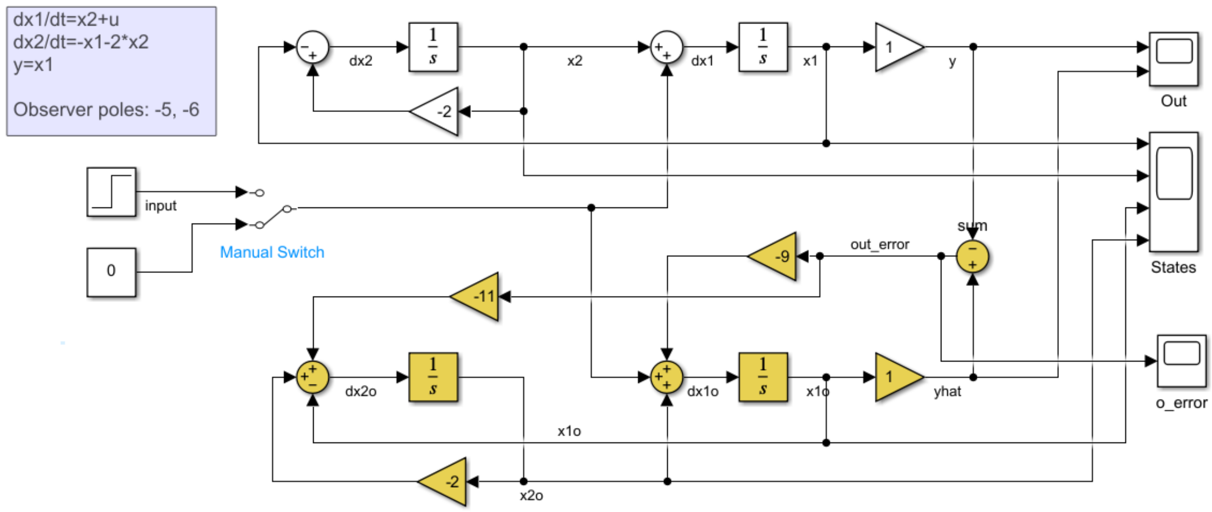
または、

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix} (\hat{y} - y)}$$

次のスライド

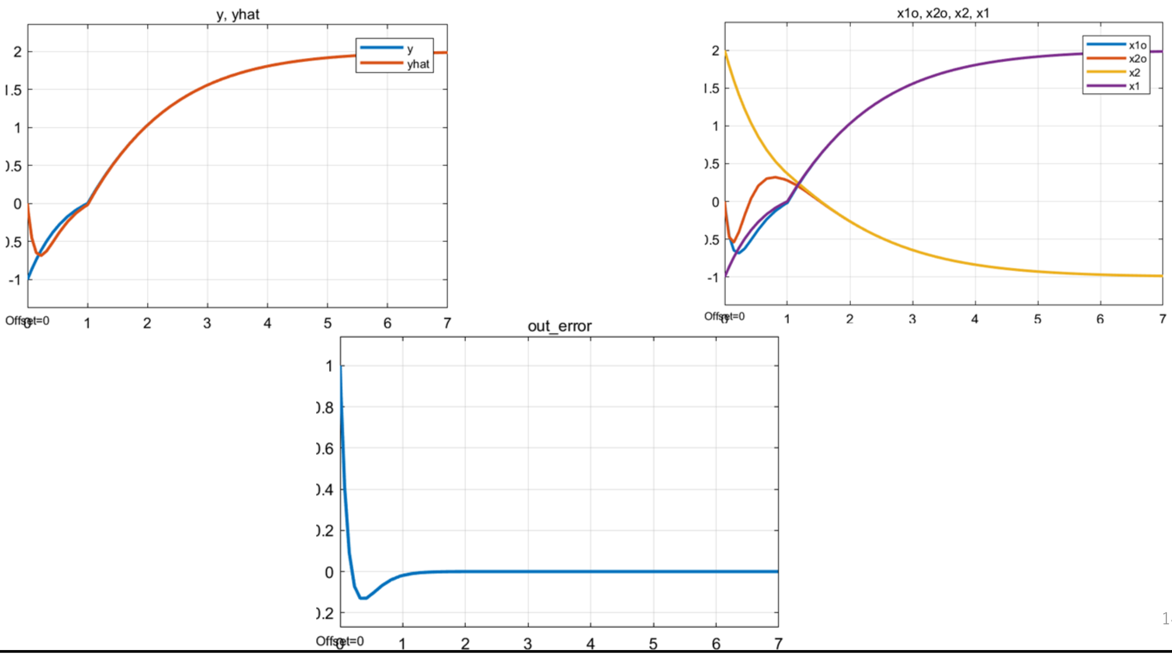
12

オブザーバの設計例：シミュレーション



13

オブザーバの設計例：シミュレーション



14