2024年度　制御工学

Lecture 3
2024年4月23日

1. 行列理論の復習
2. 状態方程式
3. 線形時不変システム(状態方程式)の応答
4. 状態推移行列の求め方

本資料には不特定多数者には配布が禁止されている著作権で保護された映像、資料を許された範囲で引用している。
本講義の受講者、および、特にクルモフが許可した者以外への配布は犯罪に問われるので強く禁止する。

2024年度 講義予定 –シラバス通り–

回	開講	内容	教科書
1	4/10	復習、講義の予定、制御系の性能	
2	4/17	状態方程式とシステム応答	1章
3	4/24	行列論	2章
4	12/15	線形時不変システムと状態推移行列	3.1～3.2
5	12/18	線形時不変システムの安定性	3.3
6	12/21	等価変換	4.2、4.3
7	1/5	可制御正準形式、可観測正準形式とその応用	4.1、4.3.2、4.3.3
8	1/11	中間試験	1章～4章
9	1/15	レギュレータの設計	5.1
10	1/18	同一次元オブザーバの設計	5.2
11	1/22	定常偏差とシステムの型	6.1
12	1/25	サーボシステムの設計(その1)	6.2
13	1/29	サーボシステムの設計(その2)	6.2
14	2/1	最適レギュレータの設計	7.1
15	2/5	演習	プリント
16	2/8	期末試験	1章～7章

2回目の講義⇔3回目の講義

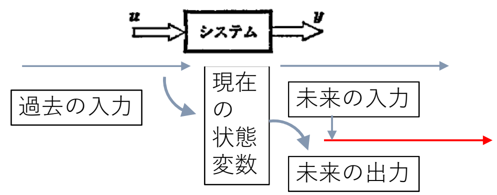
講義予定

- 状態方程式とは
- 微分方程式→伝達関数
- 微分方程式→状態方程式
- 伝達関数→状態方程式
- 状態方程式→伝達関数
- 伝達関数→微分方程式→状態方程式(一般化)

例題をもとに

状態変数とは

過去の入力をまとめて表す。
未来の出力が、現在の状態変数と、未来の入力で決まる。



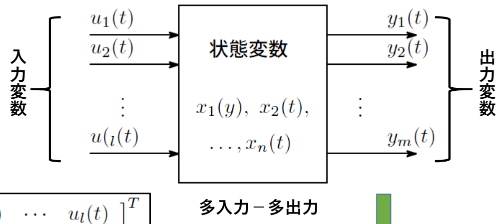
状態方程式の一般形

状態方程式 $\dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$

出力方程式 $y(t) = Cx(t)$

制御系

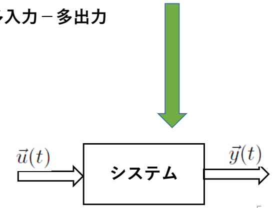
**状態方程式の利点：
多入力、多出力系を
表すことができる**



入力変数$\vec{u}(t)$	$=$	$\left[\begin{array}{cccc} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_l(t) \end{array}\right]^T$
出力変数$\vec{y}(t)$	$=$	$\left[\begin{array}{cccc} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_m(t) \end{array}\right]^T$
状態変数$\vec{x}(t)$	$=$	$\left[\begin{array}{cccc} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{array}\right]^T$

状態方程式： $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$

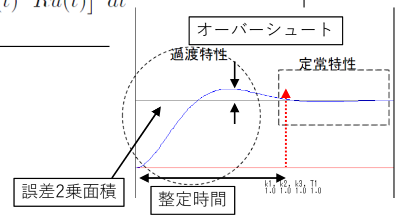
出力方程式:： $\vec{y}(t) = C\vec{x}(t)$



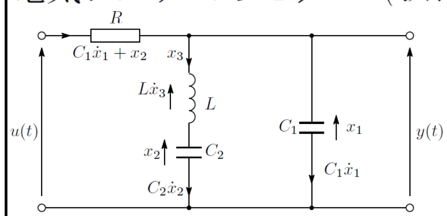
状態方程式の利点

1. 多入力、多出力系を表すことができる。
2. 初期値の影響が表せる。
3. 安定性判定が固有値計算で出来る。
4. 過渡応答の計算が指数関数で出来る。
5. 可制御、可観測が定義できる。
6. システムの非可制御、非可観測の部分も表現できる
7. 最適レギュレータが設計できる→誤差2乗面積：最小

$$J = \int_0^\infty \left[\vec{x}(t)^T Q\vec{x}(t) + \vec{u}(t)^T R\vec{u}(t)\right] dt$$



電気システムのモデル（教科書4ページ）

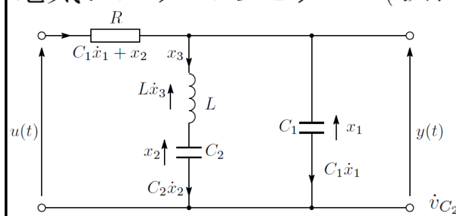


コンデンサ　$i(t) = C\dot{v}(t)$,　（または $v(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)\,d\tau + v(0)$）

抵　抗　$v(t) = Ri(t)$　R: 抵抗

コイル　$v(t) = L\dot{i}(t)$　L: インダクタンス

電気システムのモデル（教科書4ページ）



$$i_L(t) = C_2\dot{v}_{C_2}(t) \quad (1)$$

$$L\dot{i}_L + v_{C_2}(t) = v_{C_1}(t) \quad (2)$$

$$R(i_L(t) + C_1\dot{v}_{C_1}(t)) + v_{C_1}(t) = u(t) \quad (3)$$

(1) を (3)、(1) を (2) に代入し、

$$\dot{v}_{C_2}(t) = \frac{1}{RC_2}u(t) - \frac{1}{RC_2}v_{C_1}(t) - \frac{C_1}{C_2}\dot{v}_{C_1}(t) \quad (4)$$

$$LC_2\ddot{v}_{C_2}(t) + v_{C_2}(t) = v_{C_1}(t) \quad (5)$$

(4) を (5) に代入する。

$$\frac{L}{R}\dot{u}(t) - \frac{L}{R}\dot{v}_{C_1}(t) - LC_1\ddot{v}_{C_1}(t) + \int\left(\frac{1}{RC_2}u(t) - \frac{1}{RC_2}v_{C_1}(t) - \frac{C_1}{C_2}\dot{v}_{C_1}(t)\right)dt = v_{C_1}(t) \quad (6)$$

微分

$$\frac{L}{R}\ddot{u}(t) - \frac{L}{R}\ddot{v}_{C_1}(t) - LC_1\dddot{v}_{C_1}(t) + \frac{1}{RC_2}u(t) - \frac{1}{RC_2}v_{C_1}(t) - \frac{C_1}{C_2}\dot{v}_{C_1}(t) = \dot{v}_{C_1}(t) \quad (7)$$

(7) 中に v_{C_1} を y

$$\dddot{y}(t) + \frac{1}{RC_1}\ddot{y}(t) + \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}\dot{y}(t) + \frac{1}{RLC_1C_2}y(t) = \frac{1}{RC_1}\ddot{u}(t) + \frac{1}{RLC_1C_2}u(t)$$

電気システムのモデル → 伝達関数

$$\dddot{y}(t)+\frac{1}{RC_1}\ddot{y}(t)+\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}\dot{y}(t)+\frac{1}{RLC_1C_2}y(t)=\frac{1}{RC_1}\ddot{u}(t)+\frac{1}{RLC_1C_2}u(t)$$

ラプラス変換

$$\left(s^3+\frac{1}{RC_1}s^2+\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}s+\frac{1}{RLC_1C_2}\right)Y(s) = \left(\frac{1}{RC_1}s^2+\frac{1}{RLC_1C_2}\right)U(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{RC_1}s^2+\frac{1}{RLC_1C_2}}{s^3+\frac{1}{RC_1}s^2+\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}s+\frac{1}{RLC_1C_2}}$$

$$G(s)=\frac{LC_2s^2+1}{LRC_1C_2s^3+LC_2s^2+R(C_1+C_2)s+1}$$

← 伝達関数

9

微分方程式 → 状態方程式 （その1）

$$\dddot{y}(t)+\frac{1}{RC_1}\ddot{y}(t)+\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}\dot{y}(t)+\frac{1}{RLC_1C_2}y(t)=\frac{1}{RC_1}\ddot{u}(t)+\frac{1}{RLC_1C_2}u(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= y(t)\\ x_2(t) &= \dot{y}(t)\\ x_3(t) &= \ddot{y}(t)\end{aligned}}$$

を設定する。 代入

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\
\dot{x}_2(t) &= x_3(t)\\
\dot{x}_3(t) &= -\frac{1}{RC_1}x_3(t)-\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}x_2(t)-\frac{1}{RLC_1C_2}x_1(t)+\frac{1}{RC_1}\ddot{u}(t)+\frac{1}{RLC_1C_2}u(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{RLC_1C_2} & -\frac{C_1+C_2}{LC_1C_1} & -\frac{1}{RC_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}\frac{1}{RLC_1C_2} & 0 & \frac{1}{RC_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$$

状態方程式

10

微分方程式 → 状態方程式 （その2）

記述式 (1), (2), (3) → 状態方程式

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= C_2\dot{v}_{C_2}(t) \quad (1)\\
L\dot{i}_L+v_{C_2}(t) &= v_{C_1}(t) \quad (2)\\
R(i_L(t)+C_1\dot{v}_{C_1}(t))+v_{C_1}(t) &= u(t) \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= v_{C_1}(t)\\ x_2(t) &= v_{C_2}(t)\\ x_3(t) &= i_L(t)\end{aligned}}$$

代入

システムの状態変数

$$\begin{aligned}
x_3(t) &= C_2\dot{x}_2(t)\\
L\dot{x}_3+x_2(t) &= x_1(t)\\
R(x_3(t)+C_1\dot{x}_1(t))+x_1(t) &= u(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{RC}x_1(t)-\frac{1}{C_1}x_3(t)+\frac{1}{RC_1}u(t)\\
\dot{x}_2(t) &= \frac{1}{C_2}x_3(t)\\
\dot{x}_3(t) &= \frac{1}{L}x_1(t)-\frac{1}{L}x_2(t)
\end{aligned}$$

次のスライド

11

微分方程式 → 状態方程式 （その2）のつづき

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{RC_1} & 0 & -\frac{1}{C_1}\\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2}\\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{RC_1}\\0\\0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$$

状態方程式

12

伝達関数→微分方程式→状態方程式

伝達関数：初期値＝0→微分方程式→状態方程式

しかし、状態方程式では、初期値の場合も考えることができる。
（ラプラス変換による微分方程式の解き方：初期値が出てくる。

初期値の項

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t) \longrightarrow G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} + \frac{K(s)}{D(s)}$$

$$(D(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)$$

13

伝達関数→微分方程式→状態方程式

（分子が定数）

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}$$

$$\begin{aligned}(s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1)Y(s) &= b_0 U(s) \leftarrow \text{Laplace 逆変換} \\ \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) &= b_0 u(t)\end{aligned}$$

14

状態変数の定義:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = b_0 u(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x_1 \\ \frac{dy(t)}{dt} &= x_2 = \dot{x}_1 \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= x_3 = \dot{x}_2 \\ \vdots &= \vdots \\ \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} &= x_n = \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n + b_0 u \\ y(t) &= y = x_1 \end{aligned}$$

必ず状態変数として
何を選ぶか書く

15

行列形式へ書き直す:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

状態方程式

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

出力方程式

16

伝達関数→微分方程式→状態方程式
（分子が多項式）

教科書にはない

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1} \\
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \left(\frac{1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}\right)(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0) \\
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \left(\frac{V(s)}{U(s)}\right)\left(\frac{Y(s)}{V(s)}\right) \quad \leftarrow \text{ ダミー変数 } V(s) \text{ を導入} \\
\frac{V(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}
\end{aligned}
$$

$$
(s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1)V(s) = U(s) \quad \leftarrow \text{ Laplace 逆変換}
$$

$$
\frac{d^n v(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1}v(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dv(t)}{dt} + a_1 v(t) = u(t)
$$

$$
\frac{d^n v(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1}v(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dv(t)}{dt} + a_1 v(t) = u(t)
$$

状態変数を定義：

$$
\begin{aligned}
v(t) &= x_1 \\
\frac{dv(t)}{dt} &= x_2 = \dot{x}_1 \\
\frac{d^2 v(t)}{dt^2} &= x_3 = \dot{x}_2 \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\
\frac{d^{n-1}v(t)}{dt^{n-1}} &= x_n = \dot{x}_{n-1} \\
\frac{d^n v(t)}{dt^n} &= \dot{x}_n
\end{aligned}
$$

必ず状態変数として何を選ぶか書く

$$
\dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n + u \qquad (*)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{V(s)} &= b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0 \\
Y(s) &= (b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0)V(s) \quad \leftarrow \text{ Laplace 逆変換} \\
y(t) &= b_n \frac{d^n v(t)}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}v(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{dv(t)}{dt} + b_0 v(t) \\
y &= b_n \dot{x}_n + b_{n-1}x_n + \cdots + b_1 x_2 + b_0 x_1 \quad \leftarrow (*) \text{より } \dot{x}_n \text{ を代入する。} \\
y &= b_n(-a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n + u) + b_{n-1}x_n + \cdots + b_1 x_2 + b_0 x_1
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
y = (b_0 - b_n a_1)x_1 + (b_1 - b_n a_2)x_2 + \cdots + (b_{n-1} - b_n a_n)x_n + b_n u
$$

行列形式：

教科書にはない

$$
\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

$$
y(t) = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_1 & b_1 - b_n a_2 & \ldots & b_{n-2} - b_n a_{n-1} & b_{n-1} - b_n a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u
$$

$b_n = 0$ の場合、出力式：

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

伝達関数→微分方程式→状態方程式:**例題**

伝達関数： $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{3}{(s+1)(s+2)}$

微分方程式：

$$\begin{aligned} (s+1)(s+2)Y(s) &= 3U(s) \\ (s^2+3s+2)Y(s) &= 3U(s) \\ \ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t) &= 3u(t) \end{aligned}$$

状態変数： $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$

必ず状態変数として何を選ぶか書く

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 3x_2 + 3u \end{aligned}$$

状態方程式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

伝達関数→微分方程式→状態方程式:**例題**

伝達関数： $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

微分方程式

$$\begin{aligned} (s+1)(s+2)Y(s) &= (s+3)U(s) \\ (s^2+3s+2)Y(s) &= (s+3)U(s) \\ \ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t) &= \dot{u}+3u(t) \end{aligned}$$

状態変数： $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 3x_2 + \dot{u} + 3u \end{aligned}$$

状態方程式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

状態方程式→伝達関数

状態方程式： $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$

出力方程式:： $\vec{y}(t) = C\vec{x}(t)$

初期値＝０としている

ラプラス変換　状態方程式　$sX(s) = AX(s) + BU(s)$

出力方程式　$Y(s) = CX(s)$

$X(s)$ でまとめる $sX(s) - AX(s) = BU(s) \rightarrow (sI-A)X(s) = BU(s)$

$X(s)$ でまとめる $X(s) = (sI-A)^{-1}BU(s)$

出力方程式へ代入 $Y(s) = \{C(sI-A)^{-1}\}BU(s)$

伝達関数<u>行列</u> $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B$

多入力多出力

状態方程式→伝達関数:例題

教科書p.94例題4－5

多入出力システム、

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

においては、伝達関数行列は

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 & 1/s^2 \\ 0 & 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 0 & 1/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^3} & \dfrac{3}{s} \\ \dfrac{(s+1)(s+2)}{s^3} & \dfrac{2}{s} \end{bmatrix}$$