制御工学　中間試験（令和６年６月５日）１時限 C0215 講義室

学籍番号		氏 名	

次のシステムについて以下の問題を解きなさい。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

1. 安定性を判別せよ。　**（20 点）**

   解答：システムが安定であるための必要十分条件は、状態方程式のシステム行列 A の固有値の実部が負であることです。

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+3 & -1 \\ 0 & s+2 \end{vmatrix} = (s+3)(s+2) = s^2 + 5s + 6 = 0 (= s^2 + a_2 s + a_1)$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3 \Rightarrow \text{システムは安定である。}$$

2. 可制御性と観測性を求めよ。　**（20 点）**

   解答：

   (a) 可制御性を求める。可制御性行列は、$U_c = \begin{bmatrix} \vec{b} & A\vec{b} \end{bmatrix}$ である。$|U_c| \neq 0$ であれば、システムが可制御である。

$$U_c = \begin{bmatrix} \vec{b} & A\vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|U_c| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \text{システムは可制御である。}$$

   (b) 可観測性を求める。可観測性行列は、$U_o = \begin{bmatrix} \vec{c} \\ \vec{c}A \end{bmatrix}$ である。$|U_o| \neq 0$ であれば、システムが可観測である。

$$U_o = \begin{bmatrix} \vec{c} \\ \vec{c}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|U_o| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \text{システムは可観測である。}$$

3. 可制御正準形式へ変換せよ。　**（20 点）**

解答：

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{z}}(t) &= \tilde{A}\vec{z}(t) + \tilde{\vec{b}}u(t) \\
y(t) &= \tilde{\vec{c}}\vec{z}(t) \\
\tilde{A} &= T^{-1}AT,\ \tilde{\vec{b}} = T^{-1}\vec{b},\ \ \tilde{\vec{c}} = \vec{c}T \\
T &= U_cW = \begin{bmatrix} \vec{b} & A\vec{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\
\tilde{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix},\ \ \tilde{\vec{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \ \tilde{\vec{c}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

4. 伝達関数 $G(s) = \vec{c}(sI - A)^{-1}\vec{b}$ を求めよ。　　**（20 点）**

解答：伝達関数は、$G(s) = \vec{c}(sI - A)^{-1}\vec{b}$ である。

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s^2+5s+6}
\end{aligned}
$$

5. 伝達関数 $Y(s) = G(s)U(s)$ の Laplace 逆変換より、システムの応答 $y(t)$ を求めよ。ただし、$U(s) = \dfrac{1}{s}$ は単位ステップ入力とする。　　**（20 点）**

解答：

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s^2+5s+6}\frac{1}{s} \\
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s+3)}\frac{1}{s}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{3(s+3)} + \frac{1}{6s}\right\} \\
y(t) &= -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$