制御工学　期末試験（令和７年８月６日、１時限）C0215講義室

学籍番号		氏 名	

1. 次の行列が、正定行列か否か判定せよ。　**（10 点）**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

解答：$A > 0$ であるための必要十分条件は、A の先頭主座小行列式がすべて正であること（教科書 46 ページ）。すなわち、

$$2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

2. 下記の状態方程式で表されるシステムについて、次の問いに答えよ。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(a) この制御系の安定性を判定せよ。　**（10 点）**

解答：行列 A の特性式を調べる。それは伝達関数の分母でもある。

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s-1 & -2 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - s - 2 = 0$$

システムが安定であるための必要条件は、特性方程式の全ての係数が正である。すなわち、本システムは不安定である。

(b) 可制御性行列 $U_c = \begin{bmatrix} \vec{b} & A\vec{b} \end{bmatrix}$ および可観測性行列 $U_o = \begin{bmatrix} \vec{c} \\ \vec{c}A \end{bmatrix}$ を求め、可制御性・可観測性を判定せよ。　**（10 点）**

解答：

$$\begin{aligned} U_c &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathrm{rank(U_c)} = 2 \ \rightarrow \ \text{システムが可制御である。} \\ U_o &= \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{rank(U_o)} = 1 \ \rightarrow \ \text{システムが可観測ではない。} \end{aligned}$$

(c) $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ。　**（20 点）**

解答：

$$\begin{aligned} G(s) &= \vec{c}(sI - A)^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 - s - 2} \begin{bmatrix} s & 2 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 - s - 2} \begin{bmatrix} 0.5s - 1 & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s-2}{s^2 - s - 2} = \frac{\cancel{s-2}}{(s+1)\cancel{(s-2)}} \\ G(s) &= \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

3. 図 1 に示すフィードバック制御系を考える。$C(s)$ は制御器の伝達関数、$P(s)$ は制御対象の伝達関数である。以下の問いに答えよ。

(a) 制御器および制御対象が以下のように表されているものとする。　**（20 点）**

$$C(s) = \frac{1}{s+1}, \quad P(s) = \frac{1}{s+3}$$

閉ループ伝達関数を求めよ（図 1 参照）。

解答：

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{R(s)} &= G(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+G(s)P(s)} = \frac{\dfrac{1}{(s+1)(s+3)}}{1+\dfrac{1}{(s+1)(s+3)}} \\ G(s) &= \frac{1}{s^2+4s+4}\end{aligned}$$

(b) 問 3a のフィードバック制御系において、閉ループ系の安定性を判定せよ。　**（20 点）**

解答：

$$\begin{aligned} s^2+4s+4 &= 0 \\ (s+2)^2 &= 0, \ \rightarrow \ s_1 = s_2 = -2 < 0 \ \ \Rightarrow \ \text{システムは安定である。}\end{aligned}$$

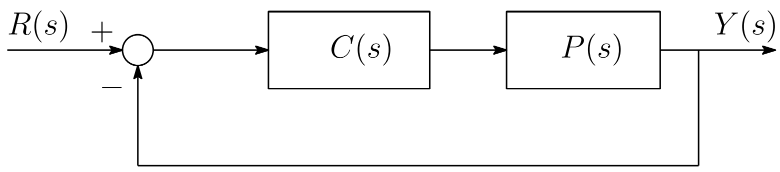

図 1: 問題 3 の制御系

4. 次のシステムについて以下の問題を解きなさい。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(t), \\ y &= \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

(a) システムの可制御性と観測性を求めよ。　**（10 点）**

解答：

i. 可制御性

$$U_c = \begin{bmatrix}\vec{b} & A\vec{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \quad |U_c| = -1 \ \rightarrow \ \text{可制御システム}$$

ii. 可観測性

$$U_o = \begin{bmatrix}\vec{c}\\ \vec{c}A\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}, \quad |U_o| = 1 \ \rightarrow \ \text{可観測システム}$$

(b) 伝達関数 $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \vec{c}(sI-A)^{-1}\vec{b}$ を計算せよ。　**（15 点）**

解答：

$$\begin{aligned} G(s) &= \vec{c}(sI-A)^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 1 & s+2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+2 & 0\\ -1 & s+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \\ G(s) &= -\frac{1}{s^2+3s+2}\end{aligned}$$

(c) Laplace 逆変換を用いて、システムの解 $y(t)$ を求めよ。ただし、$U(s)$ は単位ステップ入力とする。　**（30 点）**

解答：

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)R(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2+3s+2}\frac{1}{s}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{2s}\right\} \\ y(t) &= e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(d) 単位フィードバックに対して、定常偏差を求めよ。ただし、閉ループシステムの目標入力 $U_r(s) = 1/s$ とする。　**（20 点）**

解答： 単位フィードバックにおいて、目標入力 $R(s)$ と定常偏差との関係を表す伝達関数は、

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{1+G(s)}R(s) = \frac{1}{1+\dfrac{-1}{s^2+3s+2}}\frac{1}{s} \\ e(\infty) &= \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\cancel{s}\frac{1}{1+\dfrac{-1}{s^2+3s+2}}\frac{1}{\cancel{s}} = 2\end{aligned}$$

(e) 上記のシステムの型を判定し、ランプ入力まで定常偏差なく追従させることを考え、必要なシステムの型について述べよ。　**（15 点）**

3a 問より、本システムは 0 型である。ランプ入力まで定常偏差なく追従させるのに、2 型システムが必要である。つまり、単位フィードバック 2 型システムの定常偏差は、

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{1+G(s)}R(s) = \frac{1}{1+\dfrac{-1}{s^2(s^2+3s+2)}}\frac{1}{s^2} \\ e(\infty) &= \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{1}{1+\dfrac{-1}{s^2(s^2+3s+2)}}\frac{1}{s^{\cancel{2}}} = 0 \end{aligned}$$

(f) ステップ入力に対して定常偏差なく追従するサーボシステムを構成せよ。ただし、サーボ系の極を $\gamma_1=-7$、$\gamma_2=-8$、$\gamma_3=-9$ とする。　**（40 点）**

解答：ステップ入力に定常偏差なく追従するサーボシステムは、1 型システムである必要がある。

i. 1 型システムを構成する。

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\vec{x}}}(t) &= \tilde{A}\tilde{\vec{x}}(t) + \tilde{\vec{b}}u(t) \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u(t), \\ \tilde{\vec{f}} &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & -k_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ii. 極を $\gamma_1=-8$、$\gamma_2=-9$、$\gamma_3=-10$ を持つサーボ系の設計はレギュレータ設計と同様である。

A. システムの特性方程式および可制御正準系への変換行列 T と T^{-1} を求める。

$$\begin{aligned} |sI-\tilde{A}| &= \begin{vmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 1 & s+2 & 0 \\ 0 & 1 & s \end{vmatrix} = s^3+3s^2+2s(= s^3+a_3s^2+a_2s+a_1) \\ T &= U_cW = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ T^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

B. サーボ系の特性方程式を求める。

$$|sI-(\tilde{A}-\tilde{\vec{b}}\tilde{\vec{f}})| = (s+8)(s+9)(s+10) = (s^2+17s+72)(s+10) = s^3+27s^2+242s+720$$

C. フィードバックベクトルを求める。

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{f}} &= \begin{bmatrix} d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{bmatrix}T^{-1} = \begin{bmatrix} 720 & 240 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 24 & -192 & 720 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. 次の伝達関数について、以下の問題を解きなさい。

$$Y(s) = \frac{1}{s^2-s}U(s)$$

(a) Laplace 逆変換をして、微分方程式を導出せよ。　**（10 点）**

解答：

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2-s}U(s) \\ s^2Y(s)-sY(s) &= U(s) \leftarrow \text{Laplace 逆変換をする。} \\ \ddot{y}(t)-\dot{y}(t) &= u(t) \end{aligned}$$

(b) 状態変数を設定して、状態方程式を求めよ。　**（10 点）**

解答：

$$\begin{aligned}
\ddot{y}(t)-\dot{y}(t) &= u(t) \ \leftarrow \ \text{状態変数を設定する。}\\
y(t) &= x_1(t),\ \dot{y}(t)=x_2(t)=\dot{x}_1(t)\\
\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\
\dot{x}_2(t)-x_2(t) &= u(t)\\
\dot{x}_2(t) &= x_2(t)+u(t)\\
&\downarrow \ \ \text{状態方程式を構成する。}\\
\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)\\
y(t) &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(c) 状態フィードバック $u(t)=-f_1x_1(t)-f_2x_2(t)$ によって、極 $-1,\ -2$ とするには、フィードバックゲイン $f_1,\ f_2$ をいくらにすればよいか求めよ。　**（20 点）**

解答：

i. システムの特性方程式および可制御正準形式への変換行列 T と T^{-1} を求める。なお、システムの特性方程式は伝達関数の分母である。つまり、

$$|sI-A|=s^2-s(=s^2+a_2s+a_1)$$

$$\begin{aligned}
T &= U_cW=\begin{bmatrix}\vec{b} & A\vec{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

T は単位行列であるので、システムが可制御正準形式である。

ii. レギュレータの特性方程式を求める。

$$(s+1)(s+2)=s^2+3s+2(=s^2+d_2s+d_1)$$

iii. 状態フィードバックベクトルを求める。

$$\vec{f}=\begin{bmatrix}d_1-a_1 & d_2-a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix}$$