岡山理科大学工学部 電気電子システム学科

制御工学 春水１　担当 クルモフ

第３回宿題 ４月22日出題

学籍番号		
氏名		

提出〆切： 令和８年５月13日(水)

1. 次の伝達関係を表す微分方程式と状態方程式を求めよ。

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+s+5}$$

$$\begin{aligned}
(s^2+s+5)Y(s) &= U(s)\\
\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+5y(t) &= u(t)\\
y(t) &= x_1(t)\\
\dot{y}(t) &= x_2(t) = \dot{x}_1(t)\\
\dot{x}_2(t) &= -x_2(t) - 5x_1(t) + u(t)\\
\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)\\
y(t) &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. 次の微分方程式を表す状態方程式を求めよ。

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 8\frac{d^2y}{dt^2} + 19\frac{dy}{dt} + 13y = 13\frac{du}{dt} + 26u$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= x_1(t)\\
\dot{y}(t) &= x_2(t) = \dot{x}_1(t)\\
\ddot{y}(t) &= x_3(t) = \dot{x}_2(t)\\
\dot{x}_3(t) &= -8x_3(t) - 19x_2(t) - 13x_1(t) + 13\dot{u}(t) + 26u(t)\\
\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -13 & -19 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t)\\
y(t) &= \begin{bmatrix}26 & 13 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. 定数変化法を利用して、次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\dot{x}(t) - \frac{x(t)}{t} = 3$$

(a) 同次微分方程式を解く。

$$\begin{aligned}
\frac{du(t)}{dt} - \frac{u(t)}{t} &= 0\\
\frac{1}{u(t)}\frac{du(t)}{dt} &= \frac{1}{t}\\
\int \frac{1}{u(t)}\,dx &= \int \frac{1}{t}\,dt\\
\ln u &= \ln t + c_1\\
\ln u &= \ln t + \ln c\\
u(t) &= ct
\end{aligned}$$

(b) 微分方程式の解を求める。

$$\begin{aligned} x(t) &= ct + c(t)t \quad \leftarrow \text{微分方程式に代入} \\ c + \dot{c}(t)t + c(t) - \frac{ct + c(t)t}{t} &= 3 \\ \dot{c}(t)t &= 3 \\ \dot{c}(t) &= \frac{3}{t} \\ c(t) &= 3\ln t \end{aligned}$$

ゆえに、微分方程式の解は、

$$x(t) = ct + 3t\ln t$$

となる。