岡山理科大学工学部 電気電子システム学科

制御工学 春水1、 担当 クルモフ

第3回演習問題 5月13出題

提出〆切： 令和8年5月20日 (水)

学生番号		
氏名		

---

1. 次の行列の行列式および特性方程式を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

解答：行列式を求めるのに1列目で展開する。

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \end{aligned}$$

特性方程式：

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \left| \left(sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \right) \right| \\ &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{vmatrix} = s^3 + 3s^2 + 2s + 1 \end{aligned}$$

2. 下の状態方程式、出力方程式で表される系について伝達関数を求めよ。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

解答：<u>伝達関数</u>

$$\begin{aligned} G(s) &= \vec{c}(sI - A)^{-1}\vec{b} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & 4 & 0 \\ 3 & s & 0 \\ 0 & 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+3)(s^2+4s-12)} \begin{bmatrix} s^2+3s & -3s-9 & 0 \\ -4s-12 & s^2+7s+12 & 0 \\ 0 & 0 & s^2+4s-12 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+3)(s^2+4s-12)} \begin{bmatrix} s^2+3s & -4s-12 & 0 \\ -3s-9 & s^2+7s+12 & 0 \\ 0 & 0 & s^2+4s-12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+3)(s-2)(s+6)} \begin{bmatrix} s(s+3) & -4(s+3) & 0 \\ -3(s+3) & (s+3)(s+4) & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)(s+6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s}{(s-2)(s+6)} & -\frac{4}{(s-2)(s+6)} & 0 \\ -\frac{3}{(s-2)(s+6)} & \frac{s+4}{(s-2)(s+6)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2s}{(s-2)(s+6)} & -\frac{8}{(s-2)(s+6)} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
G(s) &= -\frac{24}{(s-2)(s+6)}
\end{aligned}
$$

本システムでは、状態方程式は3次システムであったが、伝達関数は2次関数である。

3. 式(1)のシステムについて次の問題を解けよ。

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1}
$$

(a) 推移行列を求めよ。

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{1}{s+2} - \dfrac{1}{s+3} \\ 0 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}\right\} \\
e^{At} &= \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(b) 伝達関数を求めよ。

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \vec{c}(sI - A)^{-1}\vec{b} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
G(s) &= \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^2+5s+6}
\end{aligned}
$$

(c) Laplace 逆変換を用いて、伝達関数からこのシステムを表す微分方程式を求めよ。

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+5s+6} \\
Y(s) &= \frac{1}{s^2+5s+6}U(s) \\
Y(s)(s^2+5s+6) &= U(s) \\
\mathscr{L}^{-1}\left\{s^2Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s)\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{U(s)\right\} \\
\mathscr{L}^{-1}\left\{s^2Y(s)\right\} + 5\mathscr{L}^{-1}\left\{sY(s)\right\} + 6\mathscr{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{U(s)\right\} \\
\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) &= u(t)
\end{aligned}
$$