

学生 番号		
氏 名		

式(1)のシステムについて次の問題を解けよ。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

1. 推移行列を求めよ。

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \right\} \\ e^{At} &= \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. 伝達関数を求めよ。

$$\begin{aligned} G(s) &= \vec{c}(sI - A)^{-1}\vec{b} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{問1参照}) \\ G(s) &= \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \end{aligned}$$

3. Laplace 逆変換を用いて、ステップ入力を与えられたとき、解 $y(t)$ を求めよ。

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)(s+3)} \frac{1}{s} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{3(s+3)} + \frac{1}{6s} \right\} \\
y(t) &= -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

4. 出力 $y(t)$ の定常値 ($\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$) を計算せよ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}$$
