

学生 番号		
氏 名		

下記のシステムについて次の問題を解けよ。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

1. 可制御性・可観測性を確認せよ

解答：

$$U_c = \begin{bmatrix} \vec{b} & A\vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad |U_c| = 1 \rightarrow \text{可制御システム}$$

$$U_o = \begin{bmatrix} \vec{c} \\ \vec{c}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad |U_o| = 1 \rightarrow \text{可観測システム}$$

2. 安定性を判別せよ。

解答：システム行列 A の固有値が負であればシステムが漸近安定である。

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix} = (s+1)(s+2)$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2 \Rightarrow \text{漸近安定なシステム}$$

3. 固有値 $\gamma_1 = -6$, $\gamma_2 = -8$ を持つ同次元オブザーバを設計せよ。

解答：

- (a) 双対システムを構成する。

双対システムはもとのシステムと一致する。

- (b) 固有値 $\gamma_1 = -6$, $\gamma_2 = -8$ を持つレギュレータを設計する。

- i. システムの特性方程式および可制御正準形への変換行列とその逆行列をもとめる。

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2 (= s^2 + a_2s + a_1)$$

$$T = U_c W = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- ii. 固有値 $\mu_1 = -6$, $\mu_2 = -8$ を持つシステムの特性方程式を求める。

$$(s+6)(s+8) = s^2 + 14s + 48 (= s^2 + d_2s + d_1)$$

- iii. フィードバックベクトル $\vec{f}$ をもとめる。

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 & d_2 - a_2 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 46 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 35 \end{bmatrix} = \vec{k}^T$$

(c) オブザーバを構成する。

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= (A - \vec{k}\vec{c})\hat{x}(t) + \vec{b}u(t) + \vec{k}y(t) \\ \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -24 \\ 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -24 \\ 35 \end{bmatrix} y(t) \\ \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 22 & 24 \\ -35 & -36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -24 \\ 35 \end{bmatrix} y(t)\end{aligned}$$
