

学生 番号		
氏 名		

次のシステムについて下記の問題を解けよ。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

1. 安定性・可制御性・可観測性の判別

(a) 安定性判別

固有値の実部が負であれば、システムが安定である。

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

(b) 可制御正・可観測性

$$U_c = \begin{bmatrix} \vec{b} & A\vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \text{rank}(U_c) = 2 \Rightarrow \text{システムは可制御である。}$$

$$U_o = \begin{bmatrix} \vec{c} \\ \vec{c}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \text{rank}(U_o) = 2 \Rightarrow \text{システムは可観測である。}$$

2. ステップ入力を定常誤差無し追従するように、固有値 $\gamma_1 = -8$, $\gamma_2 = -10$, $\gamma_3 = -12$ を持つサーボシステムの設計

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{z}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} -f_1 & -f_2 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix}$$

3. 固有値 $\mu_1 = -8$, $\mu_2 = -10$, $\mu_3 = -12$ を持つサーボシステム（レギュレータ）の設計

(a) システムの特性方程式及び可制御性準形への変換行列 T とその逆行列を構成

$$\begin{aligned} |sI - \tilde{A}| &= \begin{vmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 1 & -1 & s \end{vmatrix} \\ &= s(s+1)(s+2) \\ &= s^3 + 3s^2 + 2s (= s^3 + a_3s^2 + a_2s + a_1) \end{aligned}$$

$$T = U_c W = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = (-1) \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) 固有値 $\mu_1 = -8$, $\mu_2 = -10$, $\mu_3 = -12$ を持つシステムの特性方程式を構成する。

$$(s+8)(s+10)(s+12) = s^3 + 30s^2 + 296s + 960 (= s^3 + d_3s^2 + d_2s + d_1)$$

(c) フィードバック係数を求める。

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{f}} &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & -k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 960 - 0 & 296 - 2 & 30 - 3 \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 960 & 294 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 267 & -240 & -960 \end{bmatrix} \end{aligned}$$
