H31年度制御工学特論

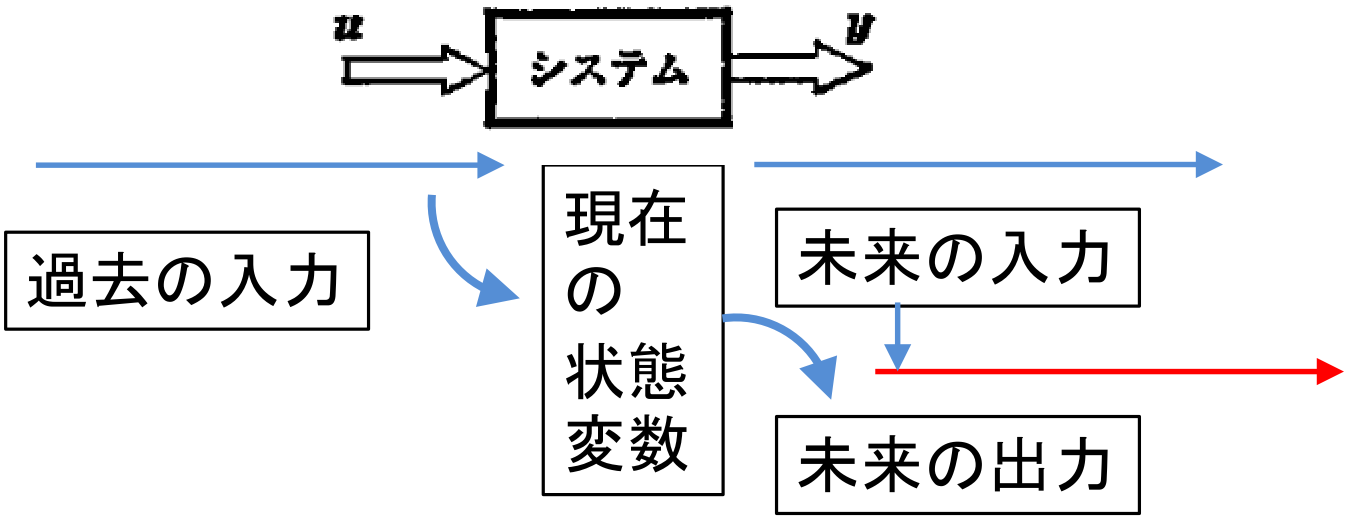
第3回講義

今日の講義予定

1. 前回の演習問題の結果
2. 状態方程式の復習
3. 状態方程式→伝達関数
4. 状態方程式の応答
5. 可制御、可観測

状態変数とは

過去の入力をまとめて表す。
未来の出力が、現在の状態変数と、未来の入力で決まる。



状態方程式の一般形

状態方程式 $$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

出力方程式 $$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t)$$

制御系

状態方程式の利点
多入力、多出力系を
表すことができる

入力
l個

出力
m個

図 9.1 多入力–多出力系

入力変数	$\boldsymbol{u}=[u_1\ u_2\ \cdots\ u_l]^T$	(9. 47)
出力変数	$\boldsymbol{y}=[y_1\ y_2\ \cdots\ y_m]^T$	(9. 48)
状態変数	$\boldsymbol{x}=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T$	(9. 49)

状態方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

出力方程式

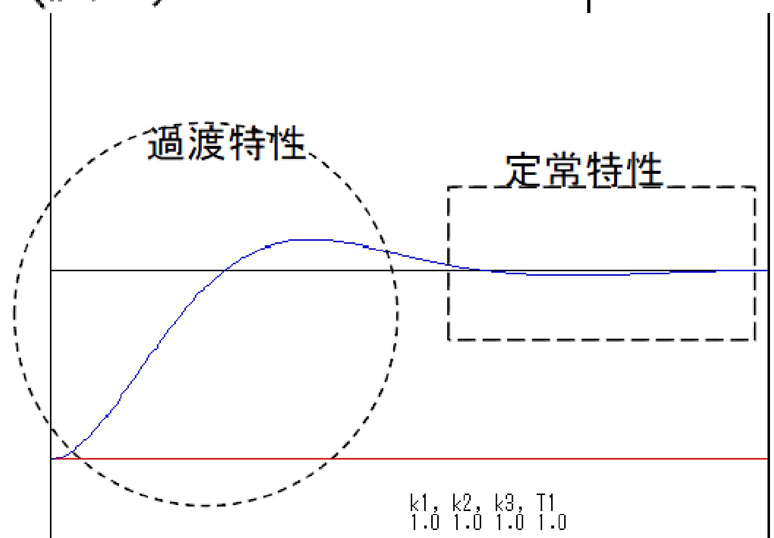
$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

図 9.2 図 9.1 を簡単化した図

状態方程式の利点

1. 多入力、多出力系を表すことができる
2. 安定性判定が固有値計算で出来る。
3. 過渡応答の計算が指数関数で出来る。
4. 可制御、可観測が定義できる。
5. 最適レギュレータが設計できる→誤差2乗面積：最小

$$J=\int_0^\infty (x^T C^T C x + u^T W^T W u)\,dt \qquad (12.18)$$



誤差2乗面積

整定時間

伝達関数→微分方程式(→状態方程式)

伝達関数　s領域

$$u_3 \rightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \rightarrow \boxed{\frac{1}{s+a}} \rightarrow c_3$$

微分方程式　t領域

$$\frac{d^2c_3}{dt^2} + a\frac{dc_3}{dt} = u_3$$

$$c_3(0)=c_{30}$$

$$\dot{c}_3(0)=c_{31}$$

伝達関数:初期値=0→微分方程式→状態方程式
しかし，状態方程式では，初期値≠0の場合も考えることができる

微分法方程式→ラプラス変換
(微分方程式の講義–ラプラス変換による解き方)
初期値の項が出てくる

$$a_n\frac{d^ng}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0g = f(t)$$

初期値の項

$$G(s) = \frac{F(s)}{K(s)} + \frac{K_0(s)}{K(s)}$$

$$K(s) = a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

(伝達関数→)微分方程式→状態方程式

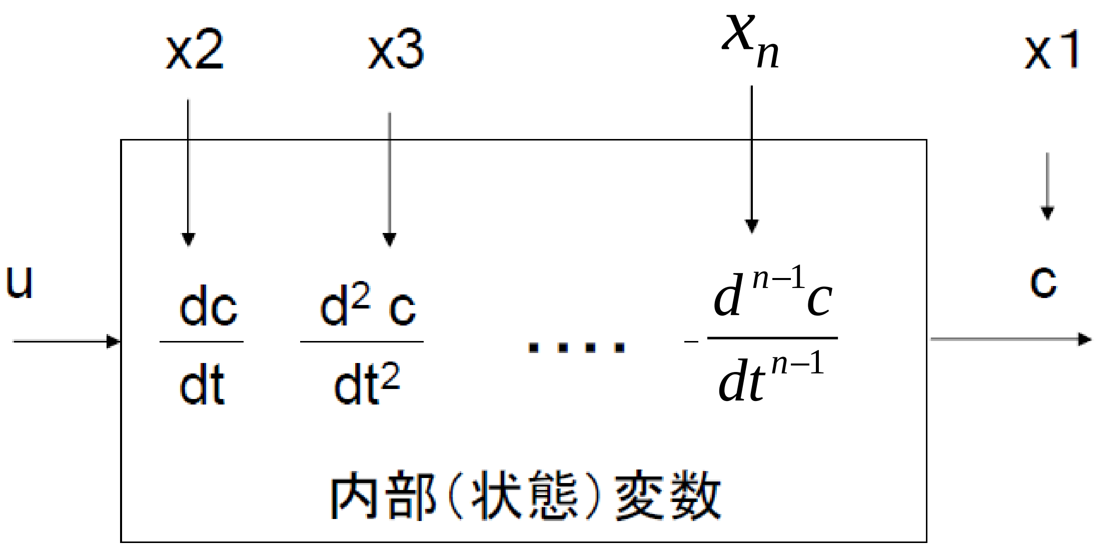
制御系の特性は一般的に制御量cの
高次の微分方程式で表現される。

$$\sum_{J=0}^{n} a_j \frac{d^j c}{dt^j} = u$$

$$u \longrightarrow \boxed{c, \frac{dc}{dt}, \frac{d^2c}{dt^2}, \cdots, \frac{d^{n-1}c}{dt^{n-1}}} \longrightarrow c$$

内部(状態)変数

(伝達関数→)微分方程式→状態方程式



$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ \cdot \\ xn \end{pmatrix} \qquad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}1 \\ \dot{x}2 \\ \dot{x}3 \\ \cdot \\ \dot{x}n \end{pmatrix}$$

状態方程式

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + Bu}$$

(伝達関数→)微分方程式→状態方程式

$$\sum_{J=0}^{n} a_j \frac{d^j c}{dt^j} = u \rightarrow a_n \frac{d^n c}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}c}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc}{dt} + a_0 c = u$$

$$\boxed{x_n = \frac{d^{n-1}c}{d^{n-1}t} = \frac{dx_{n-1}}{dt}} \qquad \boxed{x_2 = \frac{dc}{dt} = \frac{dx_1}{dt}} \qquad \boxed{x_1 = c}$$

$$\frac{d^n c}{dt^n} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d^{n-1}c}{dt^{n-1}} + \cdots - \frac{a_1}{a_n}\frac{dc}{dt} - \frac{a_0}{a_n}c + \frac{1}{a_n}u$$

$$= -\frac{a_{n-1}}{a_n}x_n + \cdots - \frac{a_1}{a_n}x_2 - \frac{a_0}{a_n}x_1 + \frac{1}{a_n}u$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -\frac{a_{n-1}}{a_n}x_n + \cdots - \frac{a_1}{a_n}x_2 - \frac{a_0}{a_n}x_1 + \frac{1}{a_n}u \end{bmatrix}$$

(伝達関数→)微分方程式→状態方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -\frac{a_{n-1}}{a_n}x_n + \cdots - \frac{a_1}{a_n}x_2 - \frac{a_0}{a_n}x_1 + \frac{1}{a_n}u \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$= A\boldsymbol{x} + Bu$$

$$c = x_1 = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}^{C} \boldsymbol{x}$$

状態方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

出力方程式

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

状態方程式→伝達関数

教科書p116

状態方程式 $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

出力方程式 $y(t) = Cx(t)$

ラプラス変換　状態方程式 $sX(s) = AX(s) + BU(s)$

出力方程式 $Y(s) = CX(s)$

$X(s)$でまとめる $X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$

出力方程式へ代入 $Y(s) = \{C(sI - A)^{-1}B\}U(s)$

伝達関数行列 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

入力、出力が複数ある

例題

教科書p117例題4

状態方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} u$$

出力方程式

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & -2 \end{bmatrix}, \quad B = b = \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ に代入

$$G(s) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ K & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s(s+2)+K} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -K & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}$$

$$= \frac{K}{s^2+2s+K}$$

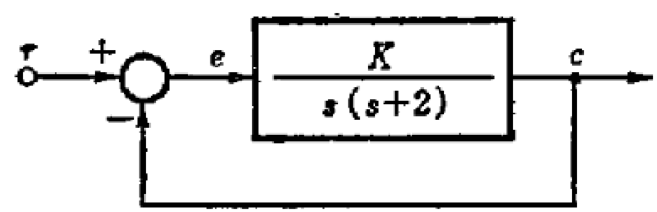


図 9.3 フィードバック系

演習問題(1) 状態方程式→伝達関数

成分で表わした状態方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

の伝達関数を求めよ。

演習問題(1)ヒント 状態方程式→伝達関数

行列形式

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t)$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

成分で表すと

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 + u$$

$$y = x_1$$

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 2u$$

$\dfrac{d}{dt} \to s$ とおく

$$s^2Y + 3sY + 2Y = 2U$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

同じ答

状態方程式の応答

教科書p62

1変数の方程式 $\dot{x} = ax$ の解→変数分離法 $x(t) = e^{at} x_0$

1変数の方程式 $\dot{x} = ax + bu$ の解→定数変化法

$$x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

$\varphi(t) = e^{at}$ とおくと

$$x(t) = \varphi(t) x_0 + \int_0^t \varphi(t-\tau) bu(\tau) d\tau$$

ベクトルの方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$ の解

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t) \boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) b\boldsymbol{u}(\tau) d\tau$$

ここで、 $\Phi(t) = e^{At}$: 遷移行列

指数関数

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2}{2!} t^2 + \frac{a^3}{3!} t^3 + \cdots + \frac{a^n}{n!} t^n + \cdots$$

遷移行列の公式

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{At} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!} t^2 + \frac{\boldsymbol{A}^3}{3!} t^3 + \cdots\cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^i}{i!} t^i \qquad (9.72)$$

状態方程式の応答

教科書p117

1変数の方程式 $\dot{x} = ax$ の解→変数分離法 $x(t) = e^{at}x_0$

1変数の方程式の変数分離法
による解法

遷移行列の求め方

教科書p118

状態方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$ の遷移行列 $\Phi(t) = e^{At}$

遷移行列の公式

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \cdots\cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^i}{i!}t^i \qquad (9.72)$$

があるが、とても計算できない。

遷移行列の求め方
方法(1) ラプラスの逆変換
方法(2) 行列の対角化→指数関数の展開
方法(3) 行列の対角化→微分方程式の分解
方法(4) 数値計算

遷移行列の求め方

方法(1) ラプラスの逆変換 →教科書p118

$\boldsymbol{u}(t)$=0のとき状態方程式 $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ →解 $x(t) = e^{At}x_0$

→ラプラス変換 $s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}_0 = A\boldsymbol{X}(s)$ → $\boldsymbol{X}(s) = (sI - A)^{-1}\boldsymbol{x}_0$

比較 $x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]x_0 = e^{At}x_0$

→

$$e^{At} = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$$

例題：状態方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

の行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ の遷移行列を求める。

状態方程式の遷移行列

例題:行列 $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ の遷移行列を求める。

$$e^{At}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]=L^{-1}\left[\begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{2}{s^2+3s+2} \\ \frac{-1}{s^2+3s+2} & \frac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}\right]=L^{-1}\left[\begin{bmatrix} \frac{2}{s+1}+\frac{-1}{s+2} & \frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2} \\ -\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2} & -\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2} \end{bmatrix}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-t}-2e^{-2t} \\ -e^{-t}+e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

遷移行列の求め方

方法(2) 行列の対角化→指数関数の展開→教科書p63の方法

(1) 状態方程式の行列 A の固有値 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$、固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_n$ を求める。

(2) モード行列 T とその逆行列 T^{-1} を求める。

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda$$

(3) 行列Aを対角化する

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

(4)公式 $\boxed{e^{At} = T^{-1}e^{\Lambda t}T}$

証明

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \cdots + \frac{A^n}{n!}t^n + \cdots$$

$$= TT^{-1} + T\Lambda T^{-1}t + \frac{\left(T\Lambda T^{-1}\right)^2}{2!}t^2 + \frac{\left(T\Lambda T^{-1}\right)^3}{3!}t^3 + \cdots + \frac{\left(T\Lambda T^{-1}\right)^n}{n!}t^n + \cdots$$

$$= TT^{-1} + T\Lambda T^{-1}t + \frac{T\Lambda^2 T^{-1}}{2!}t^2 + \frac{T\Lambda^3 T^{-1}}{3!}t^3 + \cdots + \frac{T\Lambda^n T^{-1}}{n!}t^n + \cdots$$

$$= T\left(I + \Lambda t + \frac{\Lambda^2}{2!}t^2 + \frac{\Lambda^3}{3!}t^3 + \cdots + \frac{\Lambda^n}{n!}t^n + \cdots\right)T^{-1} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$$

(5)Λは対角行列より、

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{e}^{\Lambda t}$から $e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$ によって、$\boldsymbol{e}^{At}$ を求める

遷移行列の求め方

例題:状態方程式 $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

の行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ の遷移行列を求める。

固有値: $|A - sI| = \begin{vmatrix} -s & 2 \\ -1 & -s-3 \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2) = 0$ → λ=-1、-2

固有ベクトル

λ_1=-1のとき $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ λ_2=-2のとき $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ → $T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \Lambda$$

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} + -e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

遷移行列の求め方

方法(3) 行列の対角化→微分方程式の分解

(1) 方法(2)と同様にして、行列 A の固有値 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 、固有ベクトル$\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_n$を求め、行列Aを対角化する。

$$T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} \qquad T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

(2) 状態方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$ に変数変換 $\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{z}$ を行う

(4) 変換後の式 $\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = T^{-1}AT\mathbf{z}(t) + T^{-1}B\boldsymbol{u}(t)$ の$T^{-1}AT$は対角行列

(5) 変換後の式 $\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = T^{-1}AT\mathbf{z}(t) + T^{-1}B\boldsymbol{u}(t)$ は

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + \overline{b}_1 \boldsymbol{u} \\ \vdots \\ \dot{z}_n = \lambda_n z_n + \overline{b}_n \boldsymbol{u} \end{cases}$$

と分離される。

遷移行列の求め方

(2) 状態方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$ に変数変換 $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{z}$ を行う

(6) $\boldsymbol{u}(t)$=0のとき、変換後の方程式

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + \bar{b}_1 \boldsymbol{u} \\ \vdots \\ \dot{z}_n = \lambda_n z_n + \bar{b}_n \boldsymbol{u} \end{cases}$$

の解は

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(0) \\ \vdots \\ z_n(0) \end{bmatrix} = e^{\Lambda t} \boldsymbol{z}(0)$$

遷移行列の求め方

(6) $\boldsymbol{u}(t)$=0のとき、変換後の方程式 $\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n = \lambda_n z_n \end{cases}$ の解は

$$\begin{cases} z_1 = e^{\lambda_1 t} z_1(0) \\ \vdots \\ z_n = e^{\lambda_n t} z_n(0) \end{cases}$$

行列形式

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(0) \\ \vdots \\ z_n(0) \end{bmatrix} = e^{\Lambda t} \boldsymbol{z}(0)$$

(7) 変換後の方程式の遷移行列は

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

(8) 変数を元に戻して

$$e^{At} = Te^{T^{-1}ATt}T^{-1} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}$$

これでも、ややこしくて、とても計算できない。

⇒ 数値計算

状態方程式の遷移行列

例題：状態方程式 $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

の行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ の遷移行列を求める。

行列Aを対角化する：固有値：λ=-1、-2

固有ベクトル：λ_1=-1のとき $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ λ_2=-2のとき $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow T = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad T^{-1}AT == \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \Lambda$$

変数変換 $\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{z}$ を行う $\frac{d\boldsymbol{z}(t)}{dt} = T^{-1}AT\boldsymbol{z}(t) + T^{-1}B\boldsymbol{u}(t)$ $\rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + u \\ \dot{z}_2 = -2z_n - 2u \end{cases}$

変換後の式の遷移行列 $e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

変数を戻して

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} + -e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

遷移行列の求め方

(4) 数値計算で使う: $t = t_1$ の $\Phi(t) = e^{At}$ を求める。

教科書の方法

(1) 微分方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t)$ 、初期値 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ の解が、

$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{x}_0 = e^{At}\boldsymbol{x}_0$ であることを使う

(2)初期値 $\boldsymbol{x}_i(0) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$

列ベクトルで表す $\Phi(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_i & \cdots & \boldsymbol{\varphi}_n \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{\varphi}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{\varphi}_i x_i + \cdots + \boldsymbol{\varphi}_n x_n$$

(3) 初期値 $\boldsymbol{x}_i(0) = \boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$ の解

$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\varphi}_i(t)$ で第i列の列ベクトル$\boldsymbol{\varphi}_i(t)$が求まる。

状態方程式の遷移行列

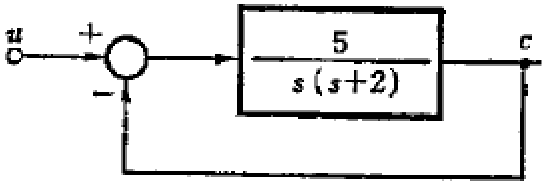


図 9.13 問題12

12. 図 9.13 のブロック図で表される系を(a)状態方程式で表し，(b) 遷移行列を 9.3.4 (1)～(4) の方法で求めよ ($c=x_1$, $\dot{c}=\dot{x}_1=x_2$ とおけ).

問(a)

$$C(s)=\frac{5}{s(s+2)}(U(s)-C(s)) \qquad \ddot{c}=-2\dot{c}-5c+5u$$

$$x_1=c, x_2=\dot{c}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}u \qquad c=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

状態方程式の遷移行列

問(b) p118の方法

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

固有値

$$\lambda_1 = -1+2i, \lambda_2 = -1-2i$$

固有ベクトル

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+2i \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-2i \end{bmatrix}$$

モード行列

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1+2i & -1-2i \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \frac{1}{4i}\begin{bmatrix} 1+2i & -1 \\ 1-2i & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{T^{-1}ATt} = \begin{bmatrix} e^{(-1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-2i)t} \end{bmatrix}$$

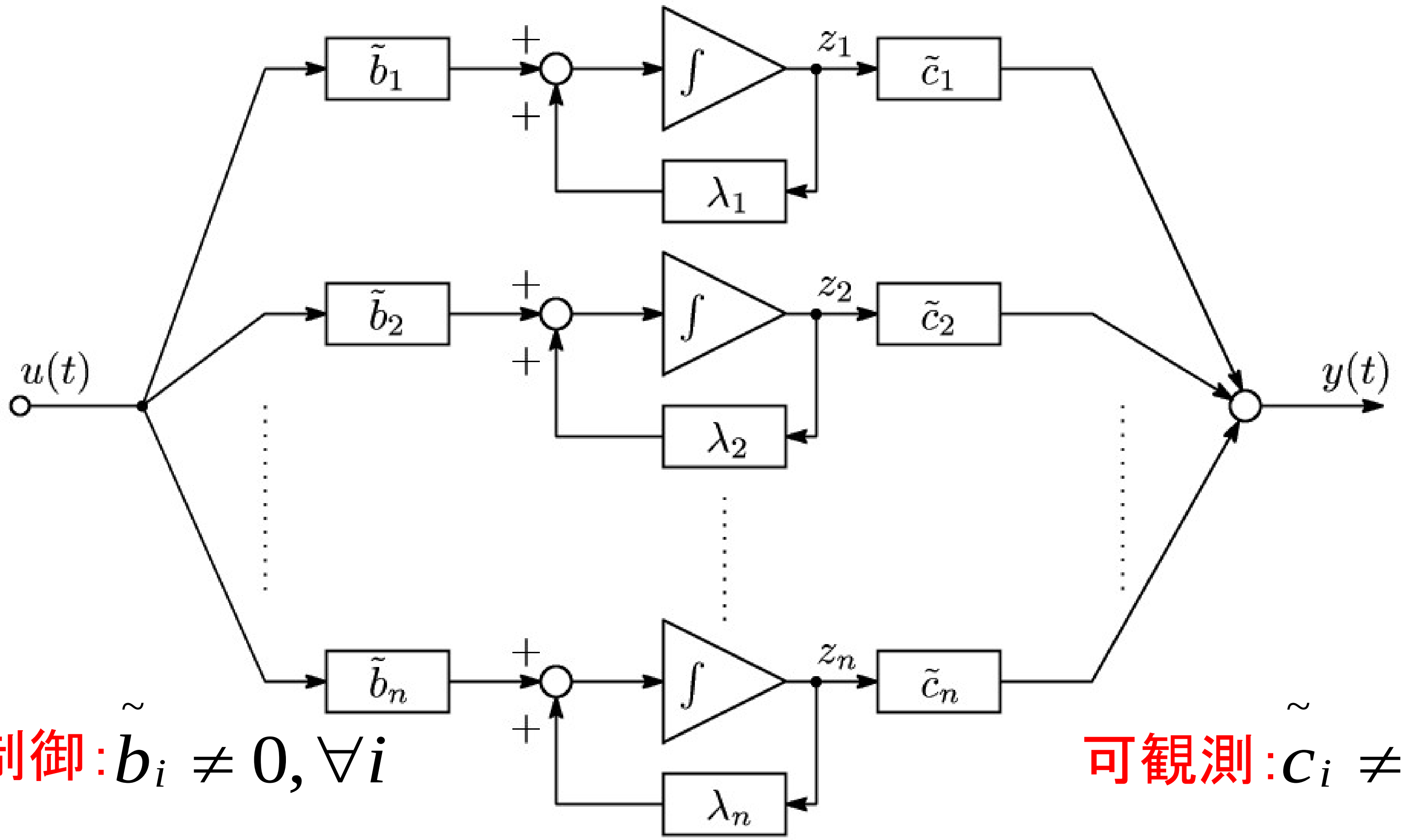
ここで

$$e^{(-1+2i)t} = e^{-t}(\cos 2t + i\sin 2t)$$

$$e^{(-1-2i)t} = e^{-t}(\cos 2t - i\sin 2t)$$

$$e^{At} = Te^{T^{-1}ATt}T^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t) & \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t \\ -\frac{5}{2}e^{-t}\sin 2t & e^{-t}(\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t) \end{bmatrix}$$

可制御性・可観測性



可制御 : $\tilde{b}_i \neq 0, \forall i$

可観測 : $\tilde{c}_i \neq 0, \forall i$

対角正準システム

例題

制御系 $\dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2$ 行列形式 $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$

$\dot{x}_2 = -x_1 + u$ $\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t)$

$\dot{x}_3 = 5x_2 - 4x_3$

$y = x_1$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

可制御、可観測を調べる

行列をA対角化

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 5_1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+4) = 0$$

より固有値λ=-1, -2, -4

λ=−1の固有ベクトルx_1=[3 3 5]^T

λ=−2の固有ベクトルx_2=[4 2 5]^T

λ=−4の固有ベクトルx_3=[0 0 1]^T

例題

モード行列

$$T=\begin{bmatrix}3&4&0\\3&2&0\\5&5&1\end{bmatrix}$$

逆行列

$$T^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&-4&0\\-3&3&0\\5&5&-6\end{bmatrix}$$

行列をA対角化

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4\\-3\\-5\end{bmatrix}$$

$$CT=\begin{bmatrix}3&4&0\end{bmatrix}$$

状態方程式 $\dfrac{d\mathbf{x}(t)}{dt}=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t)$ に変数変換 $\mathbf{x}=T\mathbf{z}$ を行う

変換後

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt}=T^{-1}AT\mathbf{z}(t)+T^{-1}B\mathbf{u}(t)$$

$$\begin{cases}\dot{z}_1=-z_1+\dfrac{4}{6}u\\[2mm]\dot{z}_2=-2z_2-\dfrac{3}{6}u\\[2mm]\dot{z}_3=-4z_3-\dfrac{5}{6}u\end{cases}$$

$$y=3z_1+4z_2$$

状態方程式がバラバラになった

例題

変換後

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = T^{-1}AT\mathbf{z}(t) + T^{-1}B\mathbf{u}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + \dfrac{4}{6}u \\ \dot{z}_2 = -2z_2 - \dfrac{3}{6}u \\ \dot{z}_3 = -4z_3 - \dfrac{5}{6}u \end{cases}$$

$$y = 3z_1 + 4z_2$$

z_1, z_2, z_3は，全て入力uにつながっている→可制御

(つながっていても可制御でない場合があるが)

z_3は，出力yにつながっていない→可観測でない

もとの変数xに戻す→図9.4

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= -x_1/3 + 2x_2/3, \\ z_2 &= x_1/2 - x_2/2 \end{aligned}\right\}$$ は観測できるが、

$$z_3 = -5x_1/6 - 5x_2/6 + x_3$$ →は観測できない。

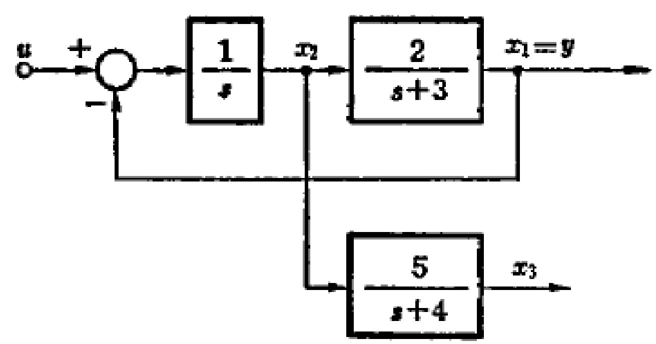


図 9.4　例題5の系のブロック線図

可制御、可観測の判定条件

状態変数 $\boldsymbol{x}$ ↕ n次元

出力変数 $\boldsymbol{y}$ ↕ l次元

入力変数 $\boldsymbol{u}$ ↕ m次元

n 次の多入力–多出力系（l 入力–m 出力）

$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$　　$y = C\boldsymbol{x}$

入力 $\boldsymbol{l}$個

出力 $\boldsymbol{m}$個

図 9.1　多入力–多出力系

(1) 可制御

⇔ $n \times nl$ の合成行列 $G = [B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \cdots\cdots \vdots A^{n-1}B]$ 階数n

(2) 可観測

⇔ $n \times nm$ の合成行列 $H = [C^T \vdots A^TC^T \vdots (A^T)^2C^T \vdots \cdots\cdots \vdots (A^T)^{n-1}C^T]$ 階数n

例題

制御系

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + u$$
$$\dot{x}_3 = 5x_2 - 4x_3$$
$$y = x_1$$

行列形式

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$$
$$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可制御、可観測を調べる

可制御行列

$$G = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -20 \end{bmatrix}$$

階数=3、可制御

$$|G| = -10$$

可観測行列 $H = \begin{bmatrix} C^T & A^TC^T & (A^T)^2C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -11 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 階数=2

可観測でない

x_1はyから直接分かる、x_2はx_1を通して間接的に分かる、x_3はyからは分からない

例題

状態方程式

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - 3x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2$$
$$\dot{x}_3 = -x_2 - 3x_3 + 2u$$
$$y = x_1$$

行列形式

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0 \quad 0]\, x$$

行列

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$n = 3, \quad l = 1, \quad m = 1$$

可制御行列

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & -6 & 17 \end{bmatrix},$$

Gの階数=3 : 可制御

可観測行列

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hの階数=2 : 可観測でない

演習問題(1)ヒント 状態方程式→伝達関数

行列形式

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t)$$

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{s^2 + 3s + 2} \end{aligned}$$

成分で表すと

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 3x_2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 2u$$

$\dfrac{d}{dt} \to s$ とおく

演習問題(2)可制御、可観測の判定

成分で表わした状態方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

の可制御、可観測行列の判定

可制御:

$$G = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

階数=2

可観測:

$$H = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

階数=2

宿題(1)ヒント

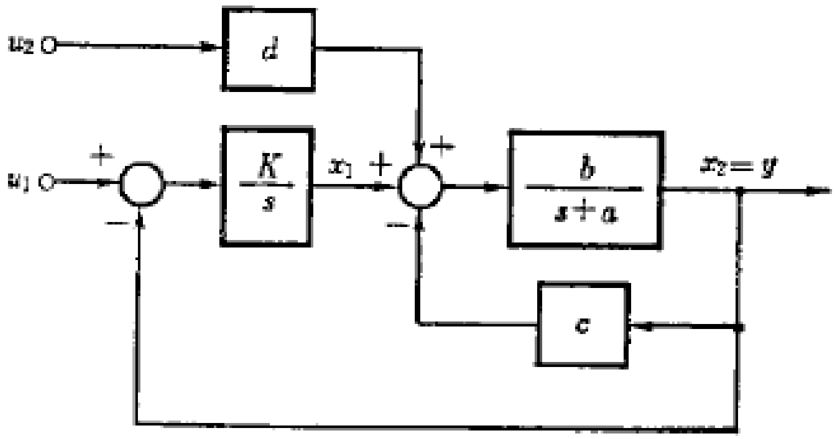


図 9.12 問題 11

11. 図 9.12 のブロック図に示す系の状態方程式，出力方程式を求めよ（図中の x_1, x_2 を状態変数に選べ）．

$$x_1 = \frac{K}{s}(u_1 - x_2) \qquad \dot{x}_1 = K(u_1 - x_2)$$

$$x_2 = \frac{1}{s+a}(x_1 - cy + du_2) \qquad \dot{x}_2 + ax_2 = bx_1 - bcy + bdu_2$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -K \\ b & -(a+bc) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix} u, \qquad y = [0 \ \ 1] x, \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$