H31年度制御工学特論

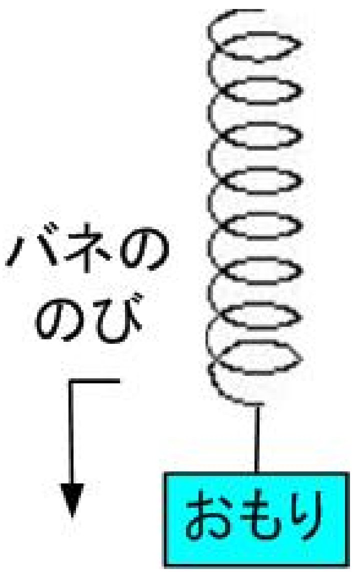
第4回講義

今日の講義予定

1. 前回の演習問題の結果
2. 非線形制御系の例
3. 平衡点の安定，不安定
4. 線形系の安定性
5. 非線形系の安定性，リャプノフの安定定理
6. 線形系のリャプノフの定理
7. 線形系の例題
8. 誤差2乗面積の計算

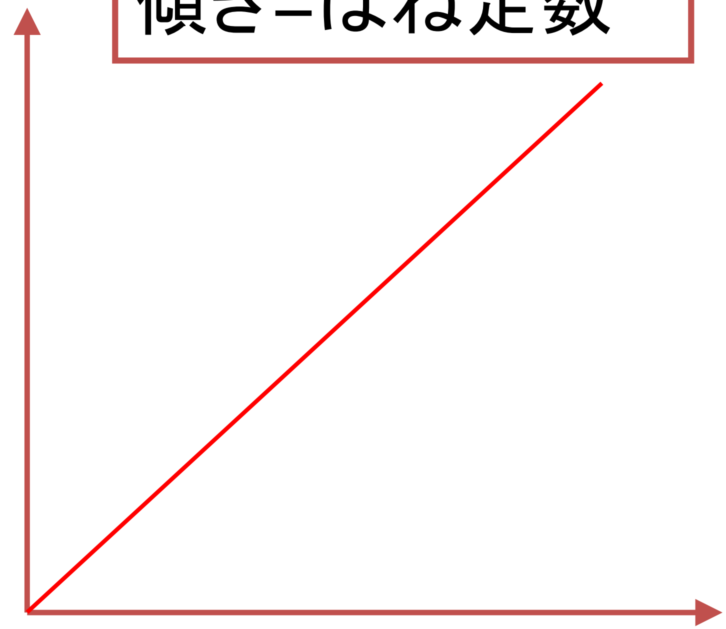
線形性の例

おもりの重さと
ばねののび



ばねののび

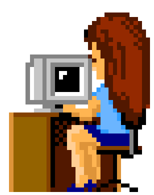
傾き=ばね定数

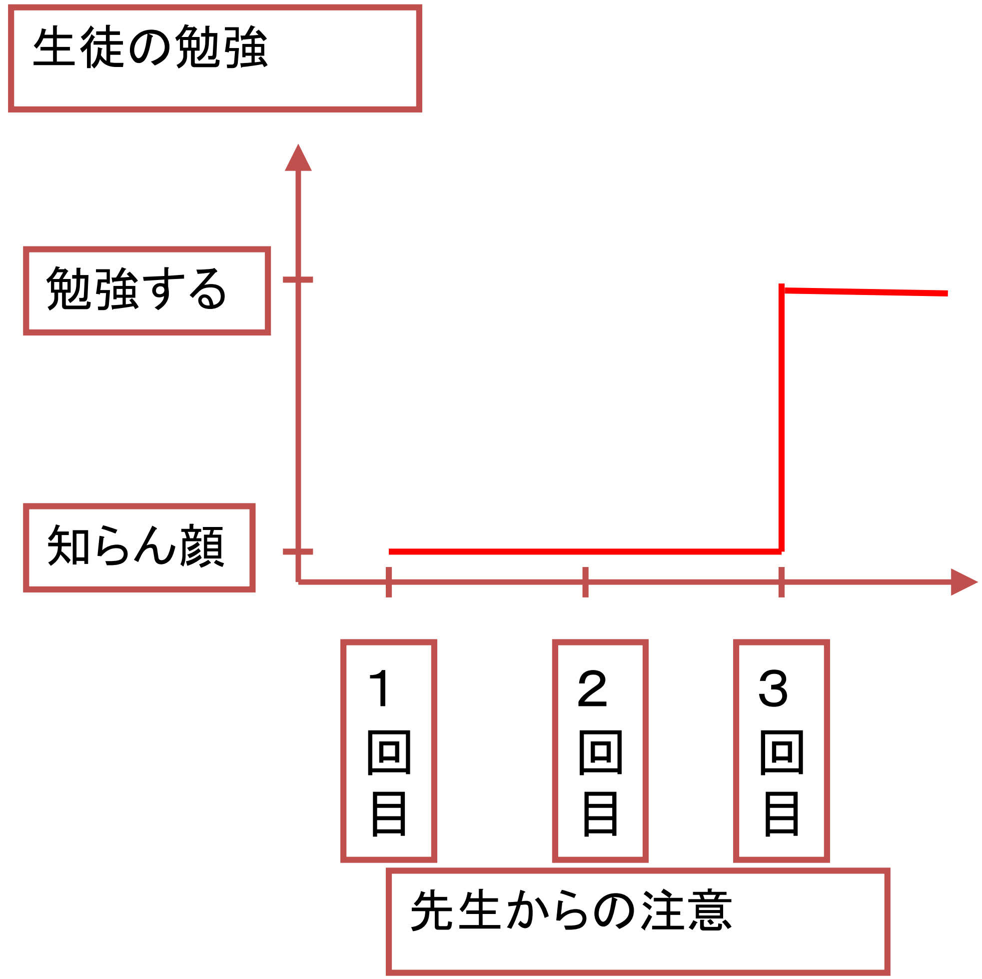


おもりの重さ

線形：反応(ばねの延び)→加えた力に比例

線形でない－非線形

	先生	学生
1回目	勉強しろ 	知らん顔 
2回目	勉強しろ 	知らん顔 
3回目	勉強しろ 	勉強する 

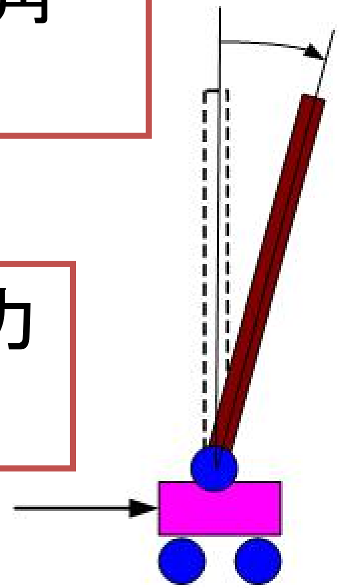


非線形：反応→加えた力に比例しない

どのようにして不安定系を安定系にするか

現在の角度θ

目標の角度$\theta_0=0$



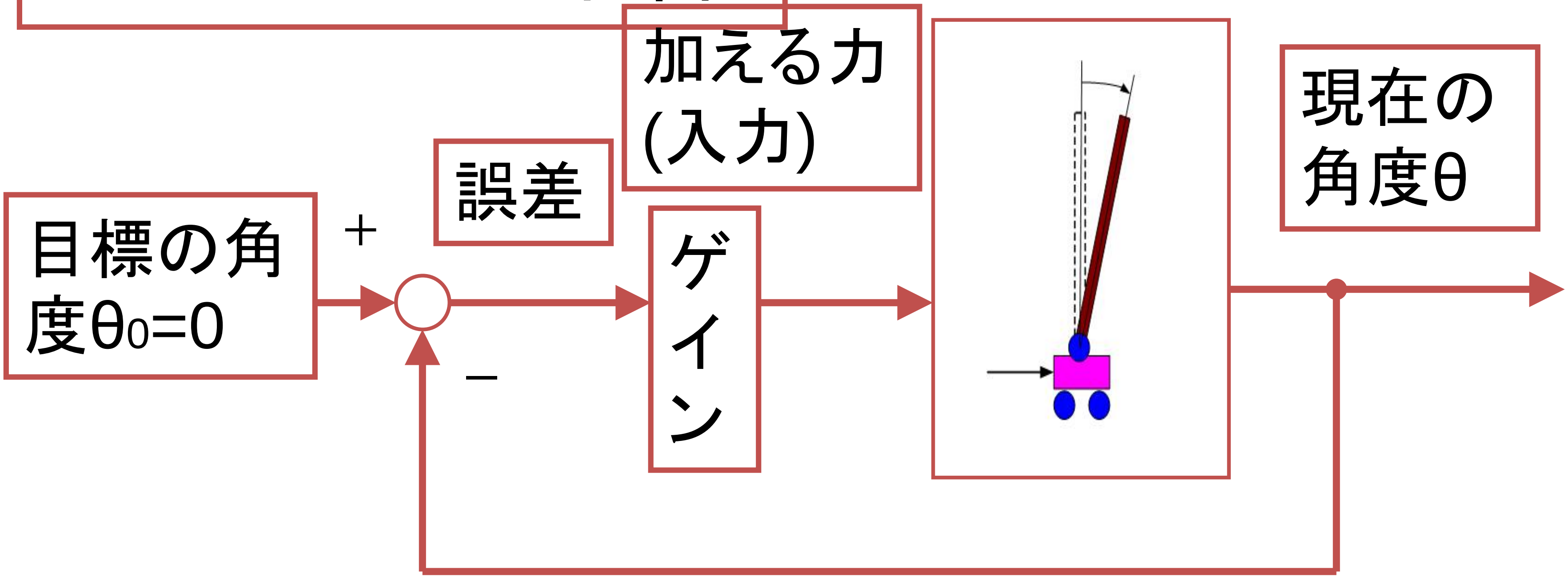
加える力(入力)

誤差$\theta-\theta_0$ 大きい ⇒ 大きい力を加える

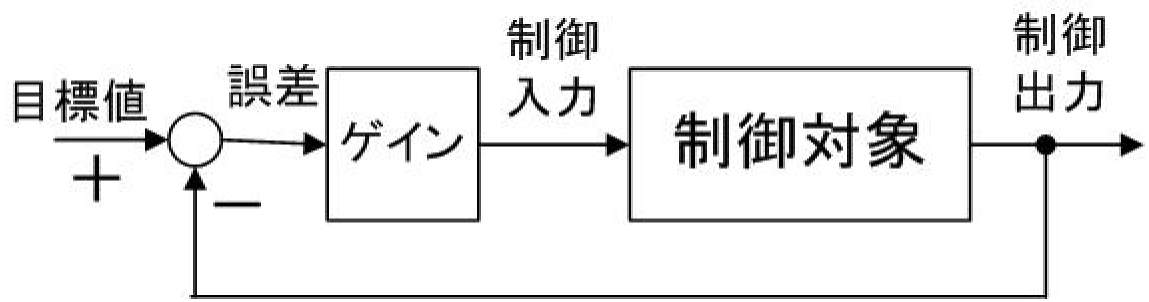
誤差$\theta-\theta_0$ 小さい ⇒ 小さい力を加える

誤差が0になるまで、繰り返す

フィードバック制御



ブロック線図



フィードバック制御が成功する条件

誤差$\theta-\theta_0$ 大きい → 大きい力を加える

誤差$\theta-\theta_0$ 小さい → 小さい力を加える

誤差が0になるまで、繰り返す

大きい力を加える → 力の効果が大きい

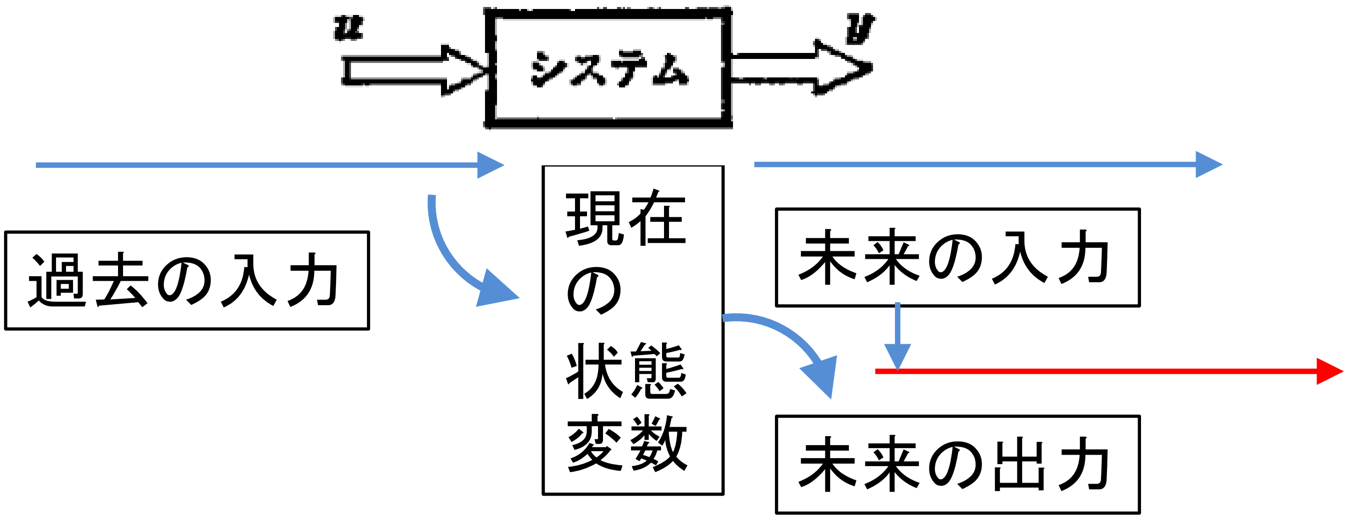
小さい力を加える → 力の効果が小さい

効果が力に比例する ＝ 線形性

線形が制御のもとになっている
非線形だと、制御が難しい

状態変数とは

過去の入力をまとめて表す。
未来の出力が、現在の状態変数と、未来の入力で決まる。



線形系の状態方程式

状態方程式 $$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$$ 出力方程式 $$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t)$$

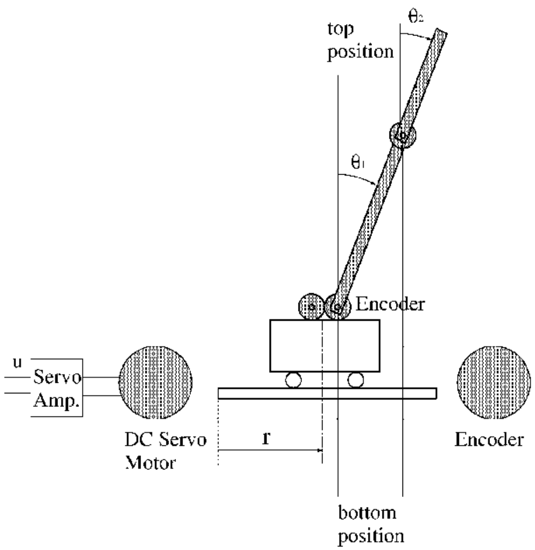
非線形系の状態方程式

状態方程式 $$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\right)$$ 出力方程式 $$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\right)$$

非線形系の例：直列2重倒立振子

- 振子の状態方程式

$$
\begin{aligned}
\ddot{\theta}_1 &= -\frac{b_2}{b_1}\ddot{r}\cos\theta_1 + \frac{b_2}{b_1}g\sin\theta_1 - \frac{c_1+c_2}{b_1}\dot{\theta}_1 + \frac{c_2}{b_1}\dot{\theta}_2 \\
&\quad -\frac{m_2 l_2 L}{b_1}\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^2 - \frac{m_2 l_2 L}{b_1}\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2 \\
\ddot{\theta}_2 &= -\frac{m_2 l_2}{b_3}\ddot{r}\cos\theta_2 + \frac{b_2 l_2}{b_3}g\sin\theta_2 + \frac{c_2}{b_3}(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2) \\
&\quad +\frac{m_2 l_2 L}{b_3}\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1^2 - \frac{m_2 l_2 L}{b_3}\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_1
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
b_1 &= J_1 + m_1 {l_1}^2 + m_2 L^2 + n_2 L^2 \\
b_2 &= m_1 l_1 + m_2 L + n_2 L \\
b_3 &= J_2 + J_{n_1} + J_{n_2} + m_2 {l_2}^2
\end{aligned}
$$

状態変数　入力：台車加速度

$$u = \ddot{r}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

状態方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\right)$$

sin、cos、変数の積、2乗を含む
→非線形

$\dfrac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$ の形をしていない

非線形系の例:3自由度多関節ロボット

$$R(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}}+\dot{R}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\left\{\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{T}R(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}}\right\}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{\tau}$$

$$K=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{T}R(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}},\quad R(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$U=m_2s_2g\sin\theta_2+m_3l_2g\sin\theta_2+m_3s_3g\sin(\theta_2+\theta_3)$$

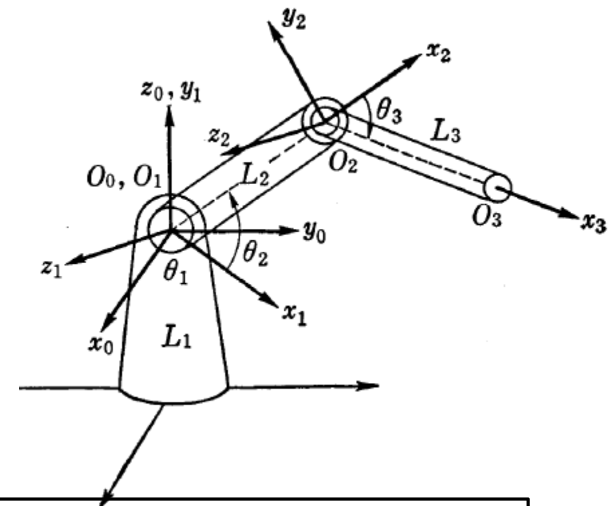
$$\begin{aligned} r_{11}=&I_{1y}+m_2{s_2}^2\cos^2\theta_2+I_{2x}\sin^2\theta_2+I_{2y}\cos^2\theta_2 \\ &+m_3\{l_2\cos\theta_2+s_3\cos(\theta_2+\theta_3)\}^2 \\ &+I_{3x}\sin^2(\theta_2+\theta_3)+I_{3y}\cos^2(\theta_2+\theta_3) \end{aligned}$$

$$r_{22}(\boldsymbol{\theta})=I_{2z}+m_2{s_2}^2+I_{3z}+m_3{s_3}^2+m_3{l_2}^2+2m_3s_3l_2\cos\theta_3$$

$$r_{23}(\boldsymbol{\theta})=I_{3z}+m_3{s_3}^2+m_3s_3l_2\cos\theta_3$$

$$r_{33}(\boldsymbol{\theta})=I_{3z}+m_3{s_3}^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\left[\frac{\partial U}{\partial\theta_1},\quad\frac{\partial U}{\partial\theta_2},\quad\frac{\partial U}{\partial\theta_3}\right]^T \qquad \boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix}$$



状態変数

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \dot{\theta}_1\\ \theta_2\\ \dot{\theta}_2\\ \theta_3\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix}$$

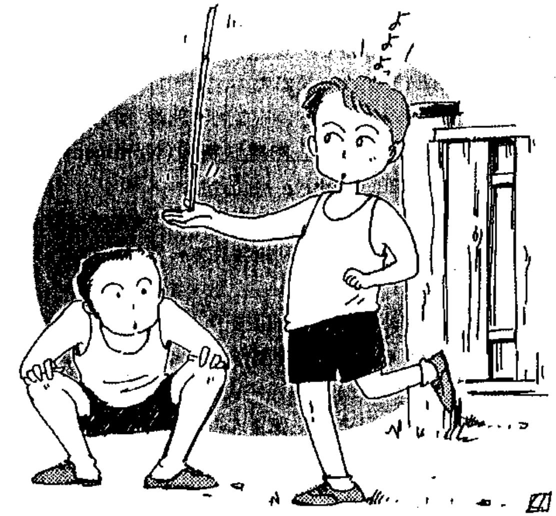
入力:モータートルク

$$\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)^T$$

状態方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)\right)$$

平衡点の不安定、漸近安定

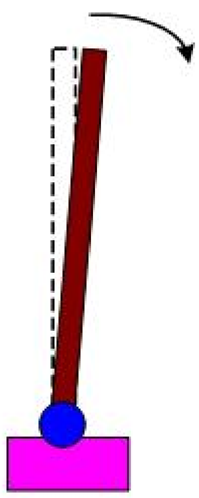


平衡点：状態方程式の$\boldsymbol{u}(t)=0$のとき

$$\left.\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\right|_{x=x_0} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{0}\right)=0$$ となる$\boldsymbol{x}_0$

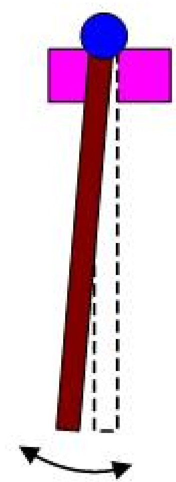
不安定な
平衡点

ほっておくと
元の状態か
ら大きく動く



漸近安定
な平衡点

ほっておい
ても元の状
態へ戻る



平衡点の安定性の定義

教科書p80

教科書p124平衡点x_0について

安定⇔平衡点近くの初期値で出発し、状態変数x有限

漸近安定⇔平衡点近くの初期値で出発し、

$t \to \infty$のとき状態変数$x \to 0$

前期の講義の「安定」=この講義の「漸近安定」

大域漸近安定⇔全ての初期値で出発し、

$t \to \infty$のとき状態変数$x \to 0$

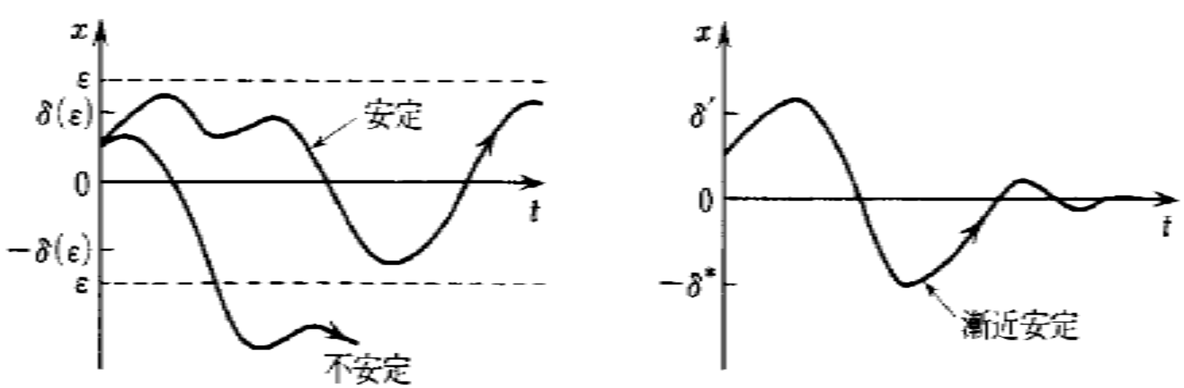


図 5.4　安定性の定義

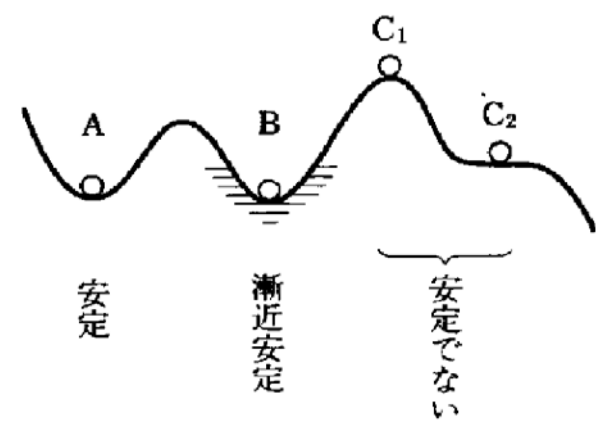


図 5.5　平衡点の安定性

線形系の安定性

線形系の状態方程式
　状態方程式　$\dfrac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$

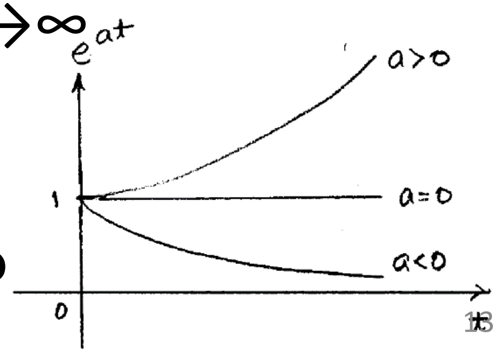
安定⇔行列Aの全ての固有値の実数部≦0
漸近安定⇔行列Aの全ての固有値の実数部＜0
不安定⇔行列Aの固有値が1つでも実数部＞0

線形系の$\boldsymbol{u}(t)$=0のとき　$\dfrac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t)$　　解　$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0$

遷移行列 e^{At} =行列Aの固有値λ_iの指数関数 $e^{\lambda_i t}$ の組み合わせ
指数関数 指数部の実部 正負で→0、または、→∞
固有値が複素数のとき　$\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$
実数部α_i、虚数部β_iに分けて

$$e^{\lambda_i t} = e^{\alpha_i t}(\cos\beta_i + i\sin\beta_i)$$

振動的になる



線形系の安定性:例

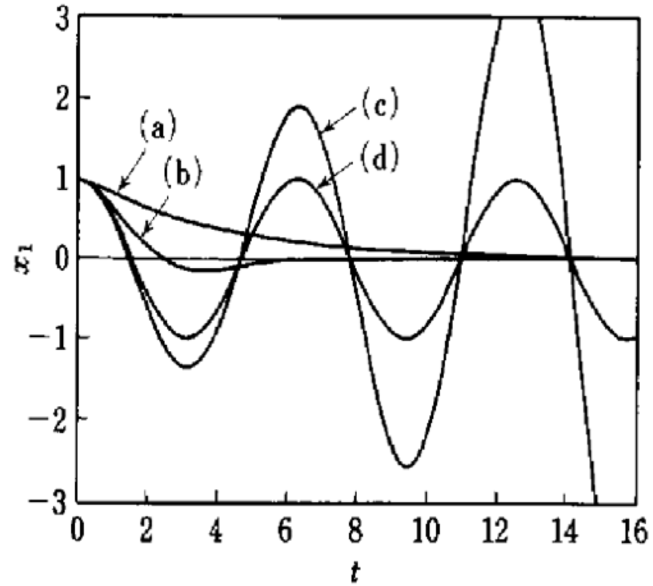
例

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1\ 0]x$$

平衡点:u=0のとき

初期値 x_1＝1.0、x_2＝0.0



(a):実数部=-0.5 :　漸近安定

(b):実数部=-2:　漸近安定

(c):実数部= 0.1:　複素根、不安定

(d):実数部=0:　　複素根、安定

非線形系の安定性

非線形系：状態方程式 $\frac{dx(t)}{dt} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\right)$ 固有値は計算できない。

安定性を判定する唯一の方法：リャプノフ法

【リアプノフの安定定理】 $\boldsymbol{x}$ を状態ベクトルとし，系を

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{9.84}$$

のように表すとき，この系は次の五つの条件を満足し，連続な一階偏導関数をもつ連続な実数値スカラ関数 $V(\boldsymbol{x})$ が存在するならば，大域漸近安定である．

(L 1)　$V(\mathbf{0}) = 0$

(L 2)　$\boldsymbol{x} \fallingdotseq \mathbf{0}$ のとき $V(\boldsymbol{x}) > 0$，すなわち $V(\boldsymbol{x})$ は正定値である．

(L 3)　$\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ のとき $V(\boldsymbol{x}) \to \infty$

(L 4)　解軌道にそった時間微分 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leqq 0$，すなわち $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ は準負定値である．

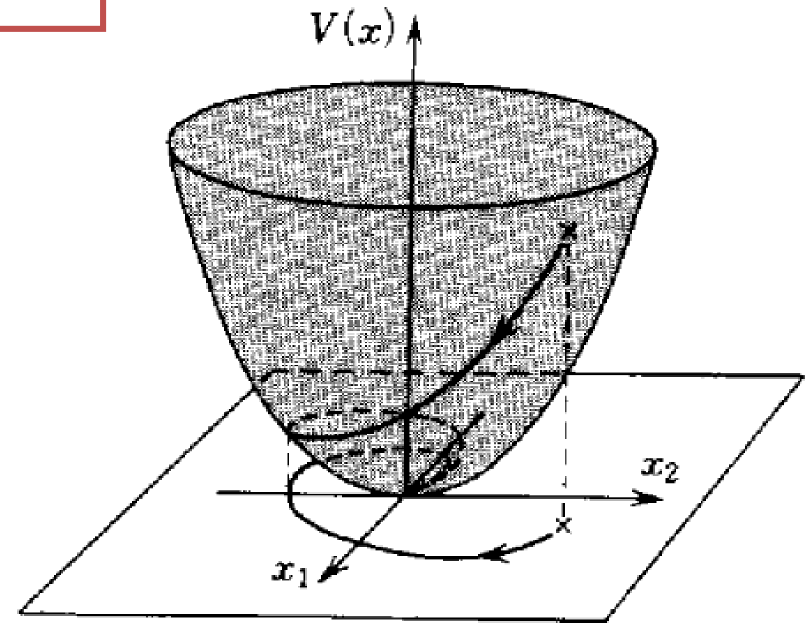
(L 5)　$\boldsymbol{x} \fallingdotseq \mathbf{0}$ の解軌道上で $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ は恒等的に 0 ではない．

以上の条件を満たす関数 $V(\boldsymbol{x})$ をリアプノフ関数という．

ここで、 $\frac{dV(t)}{dt} = \frac{dV(\boldsymbol{x}(t))}{dt} = \frac{dV(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{dV(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t)\right)$

非線形系の安定性

リャプノフ関数 $V(\boldsymbol{x}(t)) > 0$ 正定値
解に沿って傾き $\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) \leq 0$
解に沿って動くと、やがて $V(\boldsymbol{x}(t)) \to 0$
すなわち、 $\boldsymbol{x}(t) \to 0$



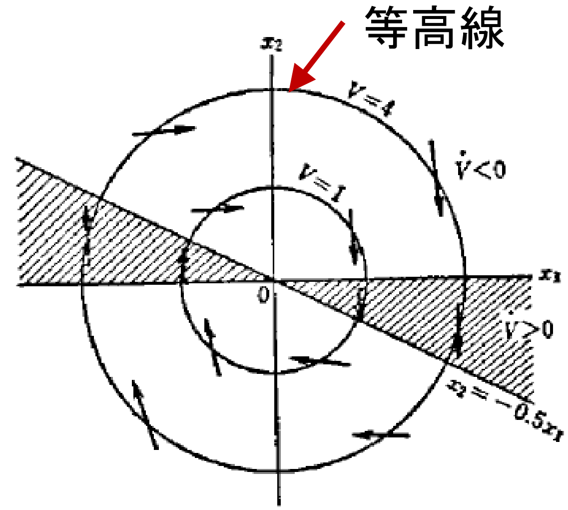
ここでは、線形系に適用する
非線形系→教科書11章p193

リャプノフ関数の存在⇒安定
(安定であるための十分条件)
1つでもリャプノフ関数があれば安定
リャプノフ関数がなくても、
不安定とは限らない

線形系の例題

例題:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$



(1) $V(\boldsymbol{x}) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 正定値

$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{x}) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1x_2 + 2x_2(-2x_1 - 2x_2) \\ &= -2x_2(x_1 + 2x_2) \end{aligned}$$

右図、斜線部分で $\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) > 0$

⇒安定かどうか不明

(2) $V(\boldsymbol{x}) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_1x_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 正定値

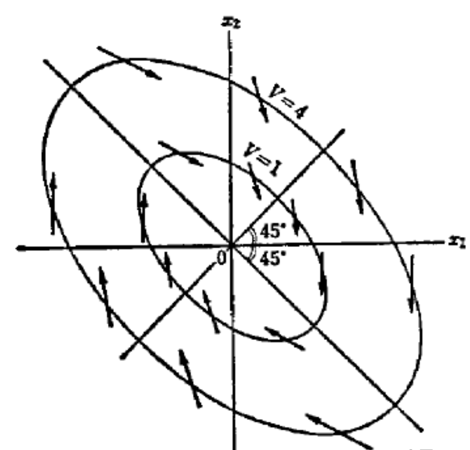
$$\begin{aligned} \dot{V}(\boldsymbol{x}) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 + \dot{x}_1x_2 + x_1\dot{x}_2 \\ &= -2x_1^2 - 4x_1x_2 - 3x_2^2 \\ &= -[x_1x_2] \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leqq 0 \end{aligned}$$

($\boldsymbol{x}=0$ のときのみ $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$)

右図、全ての部分で

$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) \le 0$

⇒安定



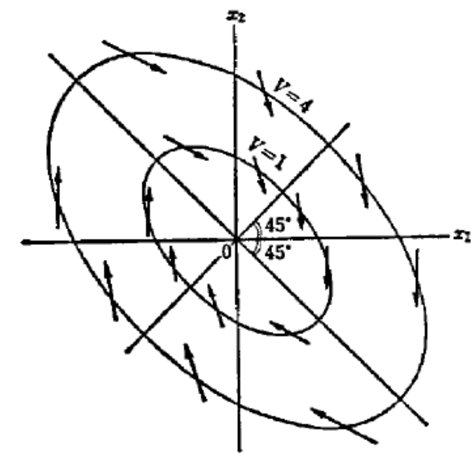
線形系の例題

(2) $V(\boldsymbol{x}) = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_1 x_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

正定値であることの証明

(a)固有値を計算→λ=3/2、1>0

(b)完全平方の形にする



線形系のリャプノフの定理

教科書p77

線形系　$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)$ の　$\boldsymbol{x}(0)=0$　漸近安定

⇔どのような正定値行列Qに対して、

　リャプノフの方程式　$A^TP+PA=-Q$

　を満たす正定値行列Pが存在すること。

このとき　$V(x)=\boldsymbol{x}^TP\boldsymbol{x}$　リャプノフ関数になっている

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x})&=\dot{\boldsymbol{x}}^TP\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^TP\dot{\boldsymbol{x}}=(A\boldsymbol{x})^TP\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^TP(A\boldsymbol{x})\\&=\boldsymbol{x}^TA^TP\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^TPA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T(A^TP+PA)\boldsymbol{x}\\&=-\boldsymbol{x}^TQ\boldsymbol{x}\ \leqq 0\end{aligned}$$

線形系の例題

例題

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x$$

のリャプノフ関数を求める

正定値行列$Q=I$とする。

Pとして $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$ とおき、p_{11}, p_{12}, p_{22},を未知数とする

Pは対称行列とできるので, (2.1)成分もp_{12}とおける

リャプノフの方程式 $A^T P + PA = -Q$ に代入

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ （2）式

p_{11}, p_{12}, p_{22}をもとめ、 $p_{11}=5/4,\ p_{12}=1/4,\ p_{22}=3/8$

$$P = \begin{bmatrix} 5/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/8 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$ （3）式

$$V(x) = \frac{1}{8}[x_1 \ x_2]\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}(10x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2)$$ （4）式

演習問題(1):ヒント

例題:

正定値行列$Q=I$とする。

Pとして $P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$ とおき、p_{11}, p_{12}, p_{22},を未知数とする

リャプノフの方程式 $A^T P + PA = -Q$に代入

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（2）式

(1.1)成分の式:-2 p_{12}-2 p_{12}＝-1

(1.2)成分の式:-2 p_{22}+ p_{11} -2 p_{12} ＝0← (2.1)成分の式と同じ

(2.2)成分の式: p_{12}-2 p_{22} +p_{12}-2 p_{22} ＝-1

これを解いて, $p_{11}=5/4,\ p_{12}=1/4,\ p_{22}=3/8$

$$P=\begin{bmatrix} 5/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/8 \end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

（3）式

が求まる.

演習問題(2):ヒント

例題

リャプノフ関数

$$V(\boldsymbol{x})=\frac{1}{8}[x_1\ \ x_2]\begin{bmatrix}10 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\frac{1}{8}(10x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2)$$

を微分して，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(4)式

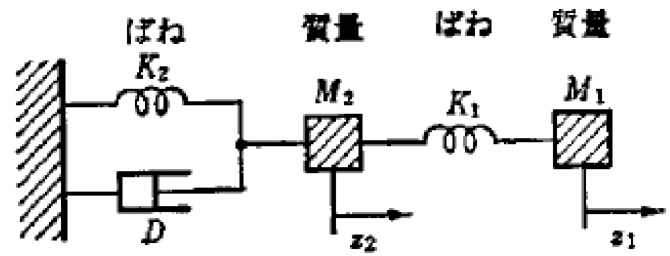
$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{8}\left(10\times 2\dot{x}_1x_1+4\dot{x}_1x_2+4x_1\dot{x}_2+3\times 2x_2\dot{x}_2\right)$$

状態方程式より，$\dot{x}_1=x_2,\dot{x}_2=-2x_1-2x_2$ を代入して，

$\dot{V}(\boldsymbol{x})\leq 0$ となることを確かめる.

線形系の例題 宿題(2)

例題:
右の力学系の安定性を調べる



質量M_1, M_2の変位x_1、x_2

運動方程式

$$\left.\begin{aligned} M_1\ddot{z}_1 &= -K_1(z_1-z_2) \\ M_2\ddot{z}_2 &= K_1(z_1-z_2)-K_2z_2-D\dot{z}_2 \end{aligned}\right\}$$

状態変数 $z_1=x_1,\quad \dot{z}_1=\dot{x}_1=x_2,\quad z_2=x_3,\quad \dot{z}_2=\dot{x}_3=x_4$

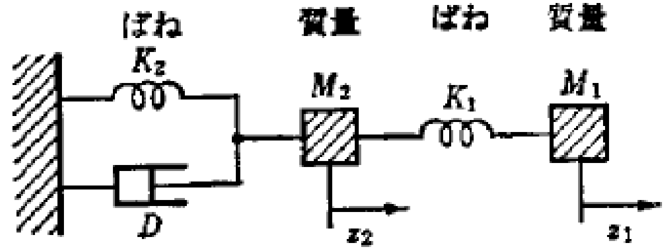
状態方程式

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K_1}{M_1}x_1+\frac{K_1}{M_1}x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{K_1}{M_2}x_1-\frac{K_1+K_2}{M_2}x_3-\frac{D}{M_2}x_4 \end{aligned}\right\}$$

$$A^T P + PA = -Q$$

線形系の例題

リャプノフ関数
＝力学系の全エネルギー
＝質量の運動エネルギー
+ばねの位置エネルギー



$$V(x)=\frac{1}{2}M_1x_2^2+\frac{1}{2}M_2x_4^2+\frac{1}{2}K_1(x_1-x_3)^2+\frac{1}{2}K_2x_3^2$$ 正定値

$$\dot{V}(x)=M_1x_2\dot{x}_2+M_2x_4\dot{x}_4+K_1(x_1-x_3)(\dot{x}_1-\dot{x}_3)+K_2x_3\dot{x}_3$$

$$=-Dx_4^2\leqq 0$$

よって、安定

宿題(2):ヒント

例題:

リャプノフ関数の微分

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = M_1 x_2 \dot{x}_2 + M_2 x_4 \dot{x}_4 + K_1 (x_1 - x_3)(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + K_2 x_3 \dot{x}_3$$

に 状態方程式の

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K_1}{M_1} x_1 + \frac{K_1}{M_1} x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{K_1}{M_2} x_1 - \frac{K_1 + K_2}{M_2} x_3 - \frac{D}{M_2} x_4 \end{aligned}\right\}$$

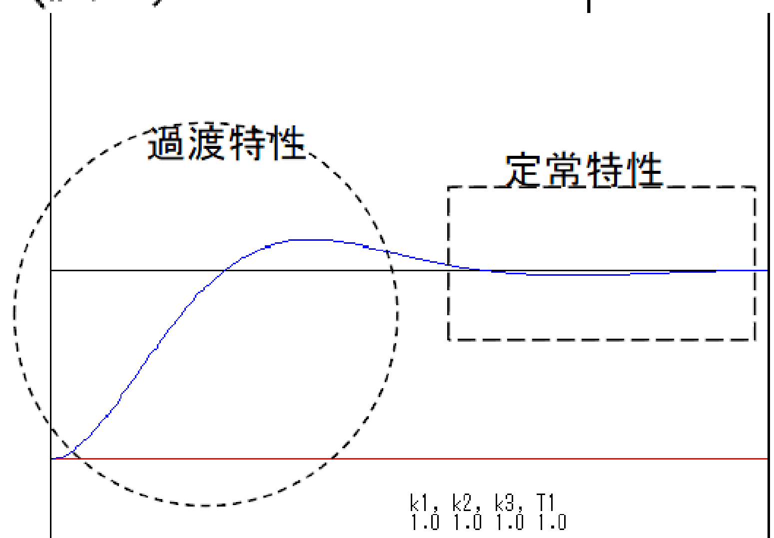
を代入して

$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -D{x_4}^2 \leq 0$ を確かめる.

状態方程式の利点

1. 多入力、多出力系を表すことができる
2. 安定性判定が固有値計算で出来る。
3. 過渡応答の計算が指数関数で出来る。
4. 可制御、可観測が定義できる。
5. 最適レギュレータが設計できる→誤差2乗面積：最小

$$J=\int_0^{\infty}(x^TC^TCx+u^TW^TWu)\,dt \qquad (12.18)$$



誤差2乗面積

整定時間

誤差2乗面積の計算

線形系　$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$　出力 $\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$　について、
誤差2乗面積　$J = \int_0^\infty \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y} dt = \int_0^\infty y_1{}^2 + y_2{}^2 + \cdots + y_m{}^2 dt$
を計算する

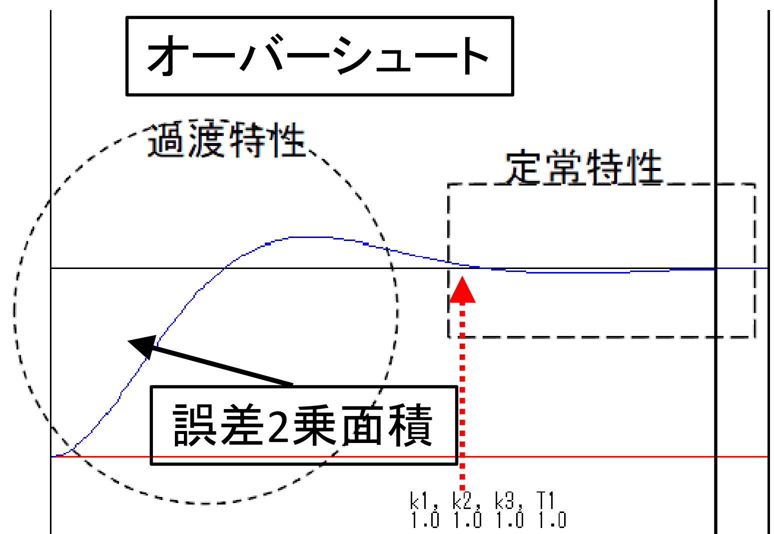
微分すると $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^T(C^T C)\boldsymbol{x}$ となるリャプノフ関数 $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}$
を求める。このPはリャプノフ方程式

$$A^T P + PA = -C^T C$$

このとき、誤差2乗面積は

$$J = \int_0^\infty (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2)\, dt = \int_0^\infty \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y}\, dt = \int_0^\infty (C\boldsymbol{x})^T (C\boldsymbol{x})\, dt$$
$$= \int_0^\infty \boldsymbol{x}^T C^T C \boldsymbol{x}\, dt = -\int_0^\infty \dot{V}(\boldsymbol{x})\, dt$$
$$= -[V(\boldsymbol{x}(t))]_0^\infty = V(\boldsymbol{x}(0)) = \boldsymbol{x}^T(0) P \boldsymbol{x}(0) \qquad (9.$$

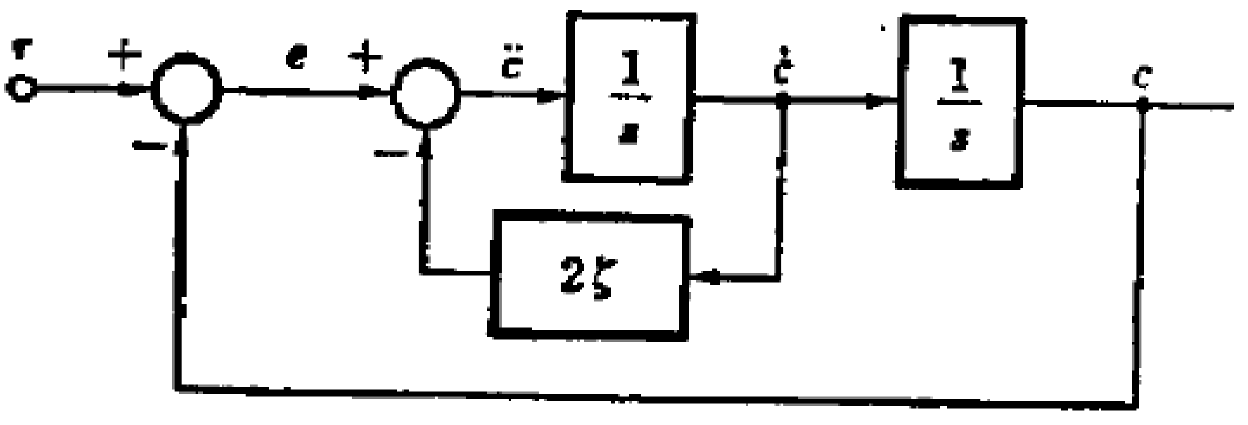
より、　$J = \boldsymbol{x}^T(0) P \boldsymbol{x}(0)$ で計算される。



線形系の例題

例題10
左の制御系にステップ入力*r*(t)が入るときの誤差2乗面積
を計算する

$$J=\int_0^\infty e^2 dt$$



線形系の例題

状態変数 $e=x_1,\ \dot{e}=\dot{x}_1=x_2$ とおくと(状態変数に誤差を選んでいる)

状態方程式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

出力方程式

$$e=x_1=C\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

よって、$J=\int_0^\infty e^2dt=\int_0^\infty \boldsymbol{x}^TC^TC\boldsymbol{x}dt$、 $C^TC=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ で、リャプノフ方程式は

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\zeta\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

これを解いて、

$$P=\begin{bmatrix}\left(\zeta+\frac{1}{4\zeta}\right) & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4\zeta}\end{bmatrix}$$

よって、誤差2乗面積は

$$J=\begin{bmatrix}x_1(0) & x_2(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\zeta+\frac{1}{4\zeta}\right) & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4\zeta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}$$

$$=\left(\zeta+\frac{1}{4\zeta}\right)x_1^2(0)+x_1(0)x_2(0)+\frac{1}{4\zeta}x_2^2(0)$$

線形系の例題

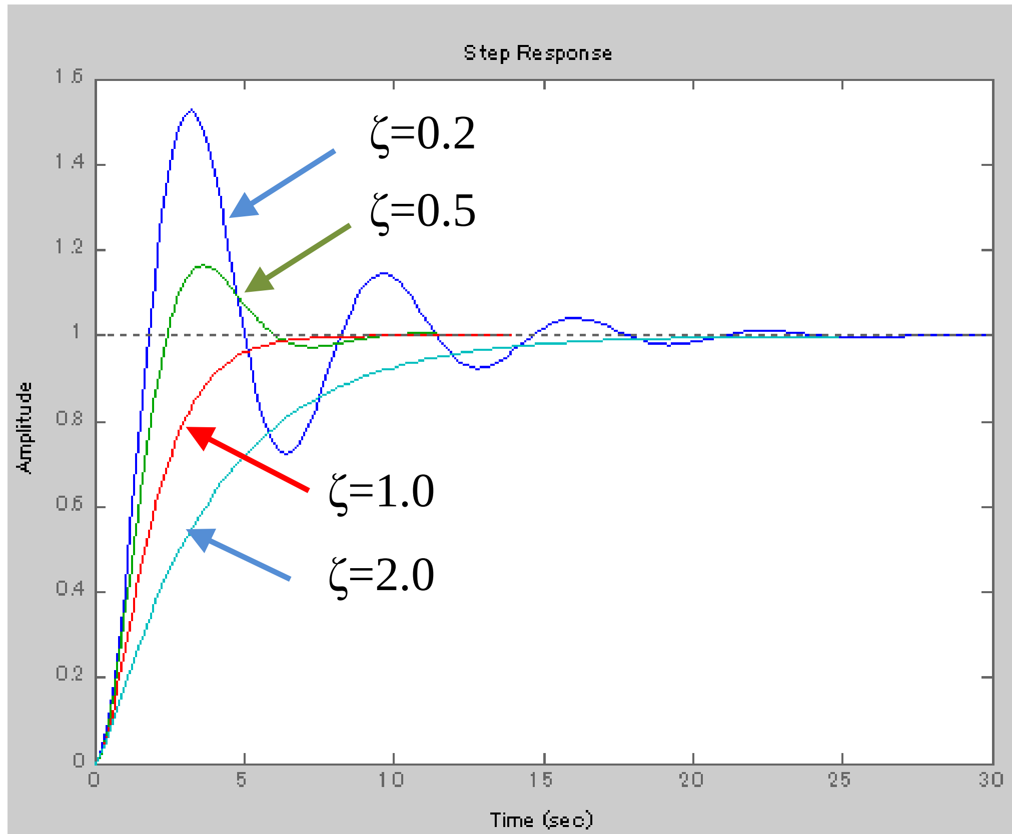
初期状態 $\dot{c}(0)=0, c(0)=0$ 、ステップ入力のとき、

$$J=\left(\zeta+\frac{1}{4\zeta}\right)x_1^2(0)+x_1(0)x_2(0)+\frac{1}{4\zeta}x_2^2(0)$$

に $x_1(0)=e(0)=1, x_2(0)=0$ を代入して

$$J=\varsigma+\frac{1}{4\varsigma}$$

ζ=0.5の時，誤差が最小



線形系の例題

例題：

ブロック線図より　$C=\frac{1}{s}\frac{1}{s}(E-2\zeta sC), E=R-C$

よって　$C=\frac{1}{s^2+2\zeta s+1}R$

微分方程式に直して　$\ddot{c}+2\zeta\dot{c}+c=r \qquad e=c-r$

ステップ入力より　$\dot{r}=0, \ddot{r}=0$　を用いて，

eの微分方程式として　$\ddot{e}=-2\zeta\dot{e}-e$

状態変数として　$x_1=e, x_2=\dot{e}$　とおくと，

$\dot{x}_1=x_2, \dot{x}_2=-2\zeta x_2-x_1$　となり，

ベクトル形式の状態方程式(1)が求まる．

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \qquad e=x_1=C\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$