１階微分方程式：変数分離形微分方程式および同次微分方程式

クルモフ　バレリー

1　変数分離形微分方程式

　次のような微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{1}$$

を**変数分離形**という。この分離形微分方程式の解法を考える。式 (1) を変形して

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{2}$$

両辺を x で積分して

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx + c \tag{3}$$

ここで、c は任意定数である。左辺の積分に置換積分法を用いて、これを y についての積分になおせば、

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c \tag{4}$$

一般解が得られる。以上の解法を次のように簡略して書く。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

変数を分離して

$$g(y)dy = f(x)dx$$

積分して

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$$

例題: 1 次の微分方程式を解け。

$$9y\frac{dy}{dx} + 4x = 0$$

[**解答**] これは変数分離形である。変数を分離して

$$9ydy = -4xdx$$

積分して

$$\int 9ydy = -\int 4xdx, \quad \to \frac{9}{2}y^2 = -2x^2 + \tilde{c}$$

または

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=c, \qquad \left(c=\frac{\tilde{c}}{18}\right)$$

これが一般解である。ここで c は任意の定数である。この一般解は楕円群を表している。

例題: 2 次の微分方程式を解け。

$$\frac{dy}{dx}=1+y^2$$

[解答] これは変数分離形である。変数を分離して

$$\frac{dy}{1+y^2}=dx$$

積分して

$$\int\frac{dy}{1+y^2}=\int dx, \qquad \to \arctan y=x+c$$

または

$$y=\tan(x+c)$$

注意：積分を行うときに任意の定数を導入することは非常に重要である。（次の例題参照）

１階微分方程式で $x=x_0$ のとき $y=y_0$ となる解を求めることを、**初期条件**「$x=x_0, y=y_0$」のもとで与えられた微分方程式を解くという。一般に,1 階微分方程式

$$f(x,y)+g(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \tag{5}$$

の両辺に dx を掛け、$dy=\frac{dy}{dx}dx$ とおけば、

$$f(x,y)dx+g(x,y)dy=0 \tag{6}$$

となる。そこで、微分方程式 (5) の代りに、これを (6) の形の方程式で表すことができる。（前述の例題参照）

例題: 3 次の微分方程式を解け。

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+y^2+1=0, \quad y(0)=1$$

[解答] 変数を分散して

$$\frac{dy}{1+y^2}=-\frac{dx}{1+x^2}$$

積分して

$$\arctan y=-\arctan x+c, \qquad \to \arctan y+\arctan x=c$$

両辺の $\tan$ を表す

$$\tan(\arctan y+\arctan x)=\tan c \tag{7}$$

なお、タンジェントの和の式は

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

であるので、これを式 *(7)* に対して利用する。

$$\tan(\arctan y + \arctan x) = \frac{y+x}{1-xy}$$

結果は

$$\frac{y+x}{1-xy} = \tan c \tag{8}$$

となる。

次に初期条件により、c を求める。$y=1$ と $x=0$ を式 *(8)* に代入し、$1=\tan c$ が得られる。これより

$$\frac{y+c}{1-xy} = 1 \qquad \text{また } y = \frac{1-x}{1+x} \tag{9}$$

最後に、*(9)* は解であるかを確かめる。

例題: 4 ニュートンの冷却の法則によれば、温度 T_0 の媒質で囲まれた物体の温度 $T(t)$ の変化率は温度差 $T(t)-T_0$ に比例し、

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-T_0) \qquad (k>0)$$

が成り立つ。*100* 度の銅球を *20* 度の液体に入れた。ただし、液体の質量は銅球の質量に比べ非常に大きいとする。*3* 分後に銅球の温度は *80* 度になった。このとき、銅球が *21* 度になるのは何分後か。

解:微分方程式は変数分離形であるから

$$\frac{dT}{dt} = -(T-20) \Longrightarrow \frac{dt}{T-20} = -kdt$$

との変形できて、

$$\begin{aligned} \ln|T-20| &= -kt + c_1 \\ T-20 &= \pm e^{c_1-kt} = ce^{-kt} \\ T(t) &= 20 + ce^{-kt} \end{aligned}$$

を得る。$t=0$ では

$$100 = 20 + c \Longrightarrow c = 80$$

$t=3$ では

$$80 = 20 + 80e^{-3k} \Longrightarrow e^{-3k} = \frac{3}{4}$$

$T(t)=21$ のとき

$$21 = 80\left(e^{-3k}\right)^{t/3} \Longrightarrow \left(e^{-3k}\right)^{t/3} = \frac{1}{80}$$

両辺の対数をとり、

$$\frac{t}{3}\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{80}\right)$$

したがって、

$$t = 3\frac{\ln 1/80}{\ln 3/4} = 3\times\frac{-4.3820}{-0.2877} = 45.6966[\mathrm{min}]$$

2 同次形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{10}$$

この形の微分方程式を同次形であるという。この方程式の右辺は $\frac{y}{x}$ だけの関数である。次のことが成り立つ。

同次形微分方程式 (10) は、変数の変換

$$\frac{y}{x} = v \text{ すなわち } \quad y = xv$$

によって、x と v についての変数分離形になる。

[**証明**]$y = xv$ とすれば、

$$\frac{y}{x} = v, \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

となる。これを (10) に代入すると

$$x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$$

これは変数分離形である。◊

例題: 5 次の微分方程式を解け。

$$2xy\frac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$$

解答この微分方程式を変形して

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} \tag{11}$$

これは同次形である。$y = xv$ とおけば、$y' = v + xv'$ である。これらを *(11)* に代入すれば、次の変数分離形になる。

$$2\left(v + x\frac{dv}{dx}\right) = v - \frac{1}{v} \quad \to \quad \frac{2v}{v^2+1}dv = -\frac{dx}{x}$$

積分して

$$\int \frac{2v}{v^2+1}dv = -\int \frac{dx}{x} + c \quad \to \quad \log(v^2+1) = -\log x + c$$

したがって、

$$x(v^2+1) = b, \quad (b = e^c)$$

これに $v = \frac{y}{x}$ を代入して整理すれば、一般解

$$x^2 + y^2 = bx$$

を得る。ここで、b は任意定数である。

3　線形微分方程式

3.1　線形微分方程式

次の形を持つ微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{12}$$

を**線形微分方程式**という（未知関数 y とその導関数 y' について１次方程式であるからこの名称がつけられちる。

線形微分方程式 (12) の一般解は

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(\int Qe^{P\,dx}\,dx + c\right) \text{である。} \tag{13}$$

[**証明**](12) の両辺に $e^{\int P\,dx}$ を掛ければ、

$$\frac{dy}{dx}e^{\int P\,dx} + yP(x)e^{\int P\,dx} = Q(x)e^{\int P\,dx} \tag{14}$$

このことで左辺は $\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P\,dx}\right)$ に等しくなるから、(14) は次のようになる。

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P\,dx}\right) = Q(x)e^{\int P\,dx}$$

両辺を積分して

$$ye^{\int P\,dx} = \int Q(x)e^{\int P\,dx}\,dx + c \quad \rightarrow \quad y = e^{-\int P\,dx}\left(\int Q(x)e^{\int P\,dx}\,dx + c\right)$$

例題: 6 次の微分方程式を解け。

$$y' - y = e^{2x}$$

[**解答**] ここで

$$P(x) = -1; \quad R(x) = e^{2x}; \quad \int P\,dx = -x$$

式 *(13)* より一般解は

$$y(x) = e^{x}\left(\int e^{-x}e^{2x}\,dx + c\right) = e^{x}[e^{x} + c] = ce^{x} + e^{2x}$$

となる。

または、元の微分方程式を $e^{\int P\,dx} = e^{-x}$ で掛算し、

$$(y' - y)e^{-x} = (ye^{-x})' = e^{2x}e^{-x} = e^{x}$$

両辺を積分すれば、上記と同じ結果が得られる。

$$ye^{-x} = e^{x} + c, \text{すなわち} \quad y = e^{2x} + ce^{x}$$

例題: 7 次の微分方程式を解け。

$$xy' + y + 4 = 0$$

[解答] ここで微分方程式を式（*12*）と同じ形になるように書き換える

$$y' + \frac{1}{x}y = -\frac{4}{x}$$

このとき $P(x) = \frac{1}{x}$、$Q(x) = -\frac{4}{x}$ であり、

$$\int P dx = \ln|x|, \qquad e^{\int P dx} = x \qquad e^{-\int P dx} = \frac{1}{x}$$

である。式 *(12)* より一般解は次のようになる。

$$y(x)\frac{1}{x}\left[\int x\left(-\frac{4}{x}\right)dx + c\right] = \frac{c}{x} - 4$$

3.2 ベルヌーイの微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{15}$$

を**ベルヌーイ微分方程式**という（$n = 0$ のときは線形微分方程式であり、$n = 1$ のときは変数分散形である）。ベルヌーイの微分方程式の解法は次の通りである。

> ベルヌーイの微分方程式 (15) で $z = y^{1-n}$ とおいて、これを x と z の微分方程式に書きかえれば、線形微分方程式になる。

[証明]$z = y^{1-n}$ とおけば、

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \tag{16}$$
$$y' = \frac{1}{1-n}y^n z' \tag{17}$$

これを (15) に代入して整理すれば、

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

となり、これは線形微分方程式である。

4 完全微分方程式：概要

次の形を持つ微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{18}$$

の左辺がある関数 $u(x,y)$ の完全微分であることがある。そのとき、式 (18) を**完全微分方程式**という。

式 (18) が完全微分方程式であれば、

$$du = P\,dx + Q\,dy \quad \left(du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \right)$$

となる関数が存在する。このことから

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{19}$$

である。そのとき、(18) は

$$du(x, y) = 0$$

である。つまり

> 完全微分方程式 $P\,dx + Q\,dy = 0$ の一般解は
>
> $$u(x, y) = c \tag{20}$$
>
> である。ただし、$P\,dx + Q\,dy = du$ である。

次の定理は重要で、DE(18) が完全であるための必要十分条件を与える。

定理 1 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ が完全 DE であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{21}$$

である。

証明： **必要性：**DE(21) は完全であるとすれば、

$$du = P\,dx + Q\,dy$$

となる関数 $u(x, y)$ が存在する。そして、

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{なので}$$

P_y と Q_x を計算すると

$$P_y = \frac{\partial P}{\partial y} \quad = \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \tag{22}$$

$$Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad = \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \tag{23}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \quad = \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{24}$$

$P_y = Q_x$ が成り立つ。

十分性：逆に式 (21) が成り立っているとする。そのときに次の関数 $u(x, y)$ を考える。

$$u = \int_a^x P(x, y)\,dx + \int_b^y Q(a, y)\,dy$$

上記の関数の右辺の第一項内の y を定数としてみなす。

次に u_x と u_y を計算する。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\int_a^x P(x, y)\,dx + Q(a, y) \\
&= \int_a^x \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dx + Q(x, y)
\end{aligned}$$

ここで、式 (21) を利用する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + Q(a, y) \\
&= [Q(x, y)]_{x=a}^{x=x} + Q(a, y) \\
&= Q(x, y) - Q(a, y) + Q(a, y) = Q(x, y)
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \tag{26}$$

式 (25) と (26) より

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = du$$

$$\Longrightarrow P\,dx + Q\,dy = 0 \quad \text{は完全 DE である。}$$

$\Diamond$