1階微分方程式

クルモフ　バレリー

平成15年10月15日

1　完全微分方程式

定理 1 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ が完全 DE であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1}$$

である。

証明： **必要性：**DE(1) は完全であるとすれば、

$$du=Pdx+Qdy$$

となる関数 $u(x,y)$ が存在する。そして、

$$P=\frac{\partial u}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial u}{\partial y}\quad \text{なので}$$

P_y と Q_x を計算すると

$$P_y=\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} \tag{2}$$

$$Q_x=\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \tag{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{4}$$

$P_y=Q_x$ が成り立つ。

十分性：逆に式 (1) が成り立っているとする。そのときに次の関数 $u(x,y)$ を

$$du(x,y)=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

を満たすように構成しましょう。関数 $\varphi(x,y)\in C^2(\Omega)$[1] を

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=P$$

[1] 連結かつ**単連結** (穴のない1つの部分からなる) な集合 $\Omega\in\mathcal{R}^2$ 上で C^2 級 (連続であり、さらに2階編導関数が存在して連結)

を満たすようにとる。たとえば、

$$\varphi(x,y)=\int P(x,y)\,dx \quad (y \text{ は固定})$$

とすればよい。このとき、等式（1）から

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial y}\\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}\end{aligned}$$

である。$\varphi(x,y)\in C^2(\Omega)$ より、

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

が成り立つので、

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

を得る。x に関して積分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \int\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\,dx=\int\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \quad (y \text{ は固定})\\ &= Q(x,y)+B'(y)\end{aligned}$$

を得る。

$$u(x,y)=\varphi(x,y)-B(y)$$

とおくと、

$$\begin{aligned}du &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy-B'(y)\,dy\\ &= Pdx+Qdy+B'(y)dy-B'(y)dy\\ &= Pdx+Qdy\end{aligned}$$

が成り立つ。

1.1 完全 DE の解法

$P(x,y)$ の積分を考える。

$$u(x,y)=\int P(x,y)\,dx+k(y) \tag{5}$$

ここで、$P(x,y)$ の y を定数とみなし、$k(y)$ は積分係数の役割を持つとする。なお、$k(y)$ を求めるために、式 (5) から $\partial u/\partial y$ を計算し、

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)\,dx\right]+\frac{dk(y)}{dy}$$

dk/dy を得るために、式 (4) の右側を利用し、

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)\,dx\right]+\frac{dk(y)}{dy}$$

最後に、dk/dy を積分することによって $k(y)$ が得られる。DE の解は $\int P(x,y)\,dx + k(y)$ である。

逆に、$Q(x,y)$ の積分を考えることもできる。

$$u(x,y) = \int Q(x,y)\,dy + l(x) \tag{6}$$

ここで、$Q(x,y)$ の x を定数とみなし、$l(x)$ は積分係数の役割を持つとする。なお、$l(x)$ を求めるために、式 (5) から $\partial u/\partial x$ を計算し、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int Q(x,y)\,dy\right] + \frac{dl(x)}{dx}$$

dl/dx を得るために、式 (4) の左側を利用し、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int Q(x,y)\,dy\right] + \frac{dl(x)}{dx}$$

最後に、dl/dx を積分することによって $l(x)$ が得られる。DE の解は $\int Q(x,y)\,dy + l(x)$ である。

例題: 1 次の DE の解を求めよ。

$$xy' + y + 4 = 0$$

解：DE を完全微分方程式の形の書き直す。

$$(y+4)\,dx + x\,dy = 0$$

ここで、$P = y + 4$ と $Q = x$ であり、DE は完全 DE である。式 *(6)* より

$$u = \int Q\,dy + l(x) = \int x\,dy + l(x) = xy + l(x)$$

$l(x)$ を得るために、前述の式を x に対して微分する。つまり

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{dl}{dx} = P = y + 4$$

より $dl/dx = 4$ であり、

$$\int 4\,dx + c^* = 4x + c^*$$

ゆえに、

$$u = xy + l(x) = xy + 4x + c^* = \text{const}$$

一般解は

$$y = \frac{c}{x} - 4$$

となる。

例題: 2 次の DE の解を求めよ。

$$2x\sin 3y\,dx + (3x^2\cos 3y + 2y)\,dy = 0$$

解： DE は完全 DE であり（**確認をしてもらいたい**）、解を得るのに式 *(5)* を利用する。

$$
\begin{aligned}
u &= \int 2x\sin 3y\,dx + k(y) = x^2\sin 3y + k(y) \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= 3x^2\cos 3y + \frac{dk(y)}{dy} = Q = 3x^2\cos 3y + 2y \\
& \Rightarrow \frac{dk}{dy} = 2y \Longrightarrow k = y^2 + c^*
\end{aligned}
$$

ゆえに、一般解は

$$x^2\sin 3y + y^2 = c$$

である。

2　積分因子

微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

が完全ではないが、適当な関数 $\mu(x,y)$ をかけて、DE

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{7}$$

が完全であるようにできる場合がある。このとき、関数 $\mu(x,y)$ を**積分因子**という。この DE を

$$\tilde{P}(x,y)dx + \tilde{Q}(x,y)dy = 0$$

と書くと、

$$\tilde{P}_y = \mu_y P + \mu P_y, \quad \tilde{Q}_x = \mu_x Q + \mu Q_x$$

であり、DE(7) は、

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \tag{8}$$

のとき、完全である。一般に偏微分方程式 (8) を解くことは難しい。

ここでは、特別な 2 つの場合、すなわち、μ が 1 変数関数 $\mu = \mu(x)$ または $\mu = \mu(y)$ である場合について考える。

場合 I： $\mu = \mu(x)$ が x のみの関数であるとき、$\mu_x = \mu'(x)$ かつ $\mu_y = 0$ であるから、偏微分方程式 (8) は常微分方程式

$$
\begin{aligned}
\mu P_y &= \mu' Q + \mu Q_x \\
\mu' Q &= \mu(P_y - Q_x) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

に帰着できる。もし、次式のように、

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = f(x) \tag{10}$$

の左辺が x のみの関数ならば、DE(9) が変数分離形であって、

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}dx = f(x)dx$$

と書ける。これを解いて、積分因子

$$\mu(x) = \exp\left[\int f(x)\,dx\right] \tag{11}$$

を得る。

場合 II： 同様に、$\mu = \mu(y)$ が y のみの関数であるとき、$\mu_y = \mu'(y)$ かつ $\mu_x = 0$ であるから、偏微分方程式 (8) は常微分方程式

$$\begin{aligned} \mu Q_x &= \mu' P + \mu P_y \\ \mu' P &= -\mu(P_y - Q_x) \end{aligned} \tag{12}$$

に帰着できる。もし、次式のように、

$$\frac{P_y - Q_x}{P} = g(y) \tag{13}$$

の左辺が y のみの関数ならば、DE(12) が変数分離形であって、

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{P_y - Q_x}{P}dx = -g(y)dy$$

と書ける。これを解いて、積分因子

$$\mu(y) = \exp\left[-\int g(y)\,dy\right] \tag{14}$$

を得る。

例題: 3 *DE*

$$(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x+2y)dy = 0$$

の一般解を求めよ。

解：

$$P_y = 4x + 6y, \quad Q_x = 2x + 2y \Rightarrow P_y \neq Q_x$$

なので、積分因子を求める。

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2(x+2y)}{x(x+2y)} = \frac{2}{x} = f(x)$$

より、

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

を得る。DE の両辺に $\mu(x)$ をかけると、

$$x^2(4xy + 3y^2 - x)dx + x^3(x+2y)dy = 0$$

となり、これは完全 DE ある（要確認）。

前節の解法を用いて、一般解

$$4x^4y + 4x^3y^2 - x^4 = c, \qquad c = 4(\bar{c} - c^*)$$

を得る。