線形微分方程式

クルモフ　バレリー

平成 15 年 10 月 29 日

1　線形微分方程式

線形微分方程式は１階微分方程式のときに紹介されたが、今回は一般化し、高次線形微分方程式について述べる。

1.1　線形微分方程式 (定義、解法等)

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 \qquad \text{（1 階線形微分方程式）}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}\cos x \qquad \text{（2 階線形微分方程式）}$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0 \qquad \text{（4 階線形微分方程式}$$

などように、未知関数 y とその導関数 y', y'', y''', ... について１次方程式であるものを**線形微分方程式**という。

以下は、主に 2 階線形微分方程式を対象とする。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x) \tag{1}$$

この微分方程式の特徴は、y おようび y の微分項に対して (1) が線形であること。ここで $P(x)$、$Q(x)$ および $R(x)$ は x の任意の関数であり、$P(x)$ と $Q(x)$ を**係数**という。

式 (1) のような形をしていない微分方程式を非線形微分方程式という。例えば、

$$y''y + y' = 0, \qquad y'' = \sqrt{y'^2 + 1}$$

は非線形微分方程式である。式 (1) の左辺を $L(y)$ で表せば、

$$L(y) = R(x) \tag{2}$$

となる。微分方程式 (1) で $R(x) = 0$ であるとき、つまり

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y &= 0 \\ (L(y) &= 0) \end{aligned}$$

であるとき、これを**線形同次微分方程式**または**斉次微分方程式**という。

定理 1 $u(x)$ と $v(x)$ が同次線形微分方程式 $L(y)=0$ の解であれば、

$$y = c_1 u(x) + c_2 v(x)$$

は $L(y)=0$ の解である。ただし、c_1、c_2 は任意定数である。

[**証明**] $u(x)$ と $v(x)$ は $L(y)=0$ の解であるから、

$$L(u)=0, \qquad L(v)=0$$

さて、$L(y)=\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y$ として、$y=c_1u+c_2v$ を $L(y)$ に代入すれば、

$$\begin{aligned}
L(c_1u+c_2v) &= (c_1u+c_2v)''+P(c_1u+c_2v)'+Q(c_1u+c_2v) \\
&= (c_1u''+c_2v'')+P(c_1u'+c_2v')+Q(c_1u+c_2v) \\
&= c_1(u''+Pu'+Qu)+c_2(v''+Pv'+Qv) \\
&= c_1L(u)+c_2L(v)=c_1\times 0+c_2\times 0=0 \Longrightarrow L(c_1u+c_2v)=0
\end{aligned}$$

$\Diamond$

<u>**例題:**</u> **1** 関数 $y=\cos x$ と $y=\sin x$ とは次の同次線形微分方程式の解である。

$$y''+y=0$$

$y=\cos x$ を微分方程式に代入すれば

$$(\cos x)''+\cos x=-\cos x+\cos x=0$$

次に $y=\cos x$ に任意の定数を、例えば *3*、かければ、関数 $y=3\cos x$ も微分方程式の解である。

$$(3\cos x)''+3\cos x=3[(\cos x)''+\cos x]=0$$

さらに、$y=\cos x$、$y=\sin x$ にそれぞれ違った係数をかけ、二つの解の和も解である。例えば

$$y=2\cos x-8\sin x$$

$$(2\cos x-8\sin x)''+2\cos x-8\sin x=2[(\cos x)''-8[(\sin x)''+\sin x]=0$$

なお、二つの関数 $u(x)$ と $v(x)$ について

$$\frac{u(x)}{v(x)}\neq 定数 \quad (v(x)\neq 0 とする)$$

であるか、または

$$\frac{v(x)}{u(x)}\neq 定数 \quad (u(x)\neq 0 とする)$$

であるとき、$u(x)$ と $v(x)$ は**1次独立**であるという。これは次のことを意味する。

定数 c_1、c_2 について $c_1 u(x) + c_2 v(x) = 0$ が恒等的に成り立てば、$c_1 = c_2 = 0$ である。 なぜならば、恒等式 $c_1 u(x) + c_2 v(x) = 0$ が成り立ち、しかも c_1 と c_2 のうちいずれかが、たとえば c_1 が 0 でなけらば、

$$\frac{u(x)}{v(x)} = -\frac{c_2}{c_1} = \text{定数}$$

となるからである（$c_2 \neq 0$ の場合には $\frac{v(x)}{u(x)} = \text{定数}$ となる)。

言い換えると、c_1 と c_2 のうちいずれかが 0 でなければ、$u(x)$ と $v(x)$ が線形非独立である。つまり

$$u(x) = -\frac{c_2}{c_1} v(x) \quad \text{または}\ v(x) = -\frac{c_1}{c_2} u(x)$$

となる。

一次独立性と定理 1 によって次の定理が成り立つ。

定理 2 *2* 階線形同次微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

の二つの解 $u(x)$ と $v(x)$ が *1* 次独立であれば、一般解は

$$y = c_1 u(x) + c_2 v(x) \quad (c_1\text{、}c_2 \text{ は任意定数})$$

である。

同じように、次の定理が成り立つ。

定理 3 n 解線形同次微分方程式

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n = 0$$

の n 個の解 $u_1(x), u_(x), \ldots u_n(x)$ が *1* 次独立であれば、一般解は

$$y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_n u_n(x) \quad (c_1, c_2, \cdots, c_n \text{は任意定数})$$

である。