線形微分方程式

クルモフ　バレリー

平成 15 年 11 月 12 日

1 微分演算子

独立変数 x に対する関数 $y = y(x)$ を微分して $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y$ を作り、記号 $\frac{d}{dx}$ を文字 D で書き表せば、文字 D は一つの演算規則である。このように、任意の関数 y に対して 1 つの関数 Ty を対応させる演算規則 T があるとき、T を**演算子**という。今回は D は 1 つの演算子であって、**微分演算子という**。

2 つの演算子 T と U について、その**和** $T+U$ と**差** $T-Y$ を、任意の関数 y に対してそれぞれ関数

$$(T+U)y = Ty + Uy \qquad (T-U)y = Ty - Uy$$

を対応させる演算子であると定義する。

また、演算子 T と U の**積**記号 TU で表すことにして、演算子 TU を任意の関数 y に対して関数

$$(TU)y = T(Uy)$$

を対応させる演算子と定義する。ここで、右辺は $y \to Uy \to T(Uy)$ の順に演算子 U と T を重ねて作用することを意味する。

例題: 1 ここで演算子 D を用いてやや複雑な演算子を次のように合成する。

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} = Dy \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}y\right\} = DDy = D^2y \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}y\right)\right\} = DDDy = D^3y \\
& \cdots
\end{aligned}$$

例題: 2 演算子 D^2、$3D$、-4 の和

$$D^2 + 3D - 4$$

は任意の関数 y に対して

$$(D^2 + 3D - 4)y = D^2y + 3Dy - 4y = \frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y$$

を対応させる演算である。

例題: 3 具体的に次のような演算ができる。

$$\begin{aligned}(D^2+3D-4)e^x &= D^2e^x+3De^x-4e^x = e^x+3e^x-4e^x=0\\ (D^2+3D-4)x^2 &= D^2x^2+3Dx^2-4x^2=2+6x-4x^2\end{aligned}$$

文字 t の多項式 $f(t)=t^2+3t-4$ に $t=D$ を代入すれば、演算子 $f(D)=d^2+3D-4$ が得られる。2つの演算子 $f(D)$ と $g(D)$ の積について次の**交換則**が成り立つ。

$$f(D)g(D)=g(D)f(D)$$

さらに、任意の演算子 $f(D)$ について、演算法則

$$f(D)(au+bv)=af(D)u+bf(D)v$$

が成り立つ。この性質を微分演算子の**線形性**という。

注意： $xD \neq Dx$:例えば

$$xDy=xy',\text{と}\qquad Dxy=(xy)'=y+xy'$$

演算子 $f(D)$ は次の性質を持っている。

$$f(D)e^{\alpha x} = f(\alpha)e^{\alpha x} \tag{1}$$

$$f(D)[e^{\alpha x}y] = e^{\alpha x}f(D+\alpha)y \tag{2}$$

[証明] (1) $De^{\alpha x}=\alpha e^{\alpha x}$, $D^2e^{\alpha x}=\alpha^2e^{\alpha x}$, ..., $D^ne^{\alpha x}=\alpha^ne^{\alpha x}$, ... が成り立つ。

いま、$f(D)=aD^2+bD+c$ として証明する。

$$\begin{aligned}f(D)e^{\alpha x} &= (aD^2+bD+c)e^{\alpha x}\\ &= aD^2e^{\alpha x}+bDe^{\alpha x}+ce^{\alpha x}\\ &= a\alpha^2e^{\alpha x}+b\alpha e^{\alpha x}+ce^{\alpha x}\\ &= (a\alpha^2+b\alpha+c)e^{\alpha x}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(D)e^{\alpha x}=f(\alpha)e^{\alpha x}$$

(2) 次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}D[e^{\alpha x}y] &= (De^{\alpha x})y+e^{\alpha x}Dy=\alpha e^{\alpha x}y+e^{\alpha x}Dy=e^{\alpha x}(D+\alpha)y\\ D^2[e^{\alpha x}y] &= D[(De^{\alpha x}y)]=D[e^{\alpha x}(D+\alpha)y]\\ &= e^{\alpha x}(D+\alpha)(D+\alpha)y\\ &= e^{\alpha x}(D+\alpha)^2y\\ &\vdots\\ D^n[e^{\alpha x}y] &= e^{\alpha x}(D+\alpha)^ny\\ &\vdots\end{aligned}$$

いま、$f(D) = aD^2 + bD + c$ として証明する。

$$\begin{aligned} f(D)[e^{\alpha x}y] &= aD^2[e^{\alpha x}y] + bD[e^{\alpha x}y] + c[e^{\alpha x}y] \\ &= ae^{\alpha x}(D+\alpha)^2 y + be^{\alpha x}(D+\alpha)y + ce^{\alpha x}y \\ &= e^{\alpha x}\{a(D+\alpha)^2 + b(D+\alpha) + c\}y = e^{\alpha x}f(D+\alpha)y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(D)[e^{\alpha x}y] = e^{\alpha x}f(D+\alpha)y$$

2 定数係数線形同次微分方程式

定数係数線形微分方程式は左辺の係数がすべて定数であり、次のような形を持っている。

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = R(x) \tag{3}$$

右辺の関数 $R(x)$ が 0 であるとき、これを**定数係数線形同次微分方程式**という。

$$f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$$

とおき、同次微分方程式

$$f(D)y = 0$$

の解を考える。

まず、$D^n y = 0$ の解を得る。次のことが明らかに成り立つ。

(A) $D^n y = 0$ の一般解は

$$y = c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1}$$

である。

さらに

(B) $(D-\alpha)^n y = 0$ の一般解は

$$y = (c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1})e^{\alpha x}$$

である。

証明： $(D-\alpha)^n y = 0$ を次のように書き換える

$$(D-\alpha)^n[e^{\alpha x}e^{-\alpha x}y] = 0$$

公式 (2) によって

$$e^{\alpha x}\{(D+\alpha)-\alpha\}^n[e^{-\alpha x}y] = 0$$

$\Rightarrow D^n[e^{-\alpha x}y] = 0$ となる。

そして、上記の式 **A** によって

$$e^{-\alpha x}y = c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1}$$

であり、一般解は

$$y = (c_1 + c_2 x + \cdots + c_n x^{n-1}) e^{\alpha x}$$

となる。

(C) $(D-\alpha)(D-\beta)y = 0 \quad (\alpha \neq \beta)$ の一般解は

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$$

である。

証明： 定理 1 を参考にして証明してもらいたい。

オイラーの公式（準備のために必要である。）

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e^{ix} & = & \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} & = & \cos x - i \sin x \qquad (i = \sqrt{-1}) \end{array} \right. \tag{4}$$

証明： 指数関数 e^u のマクローリン展開は

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots$$

である。この両辺に $u = ix$ を代入すれば

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

ところが、$\cos x$ と $\sin x$ の展開はそれぞれ

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

であるから上式は次のようになる。

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

また、この式の両辺で x の代わりに $-x$ を代入すれば、

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

が得られる。

(D) $(D^2 + bD + c)y = 0 \quad (b^2 - 4c < 0)$ の一般解は

$$y = c_1 e^{\lambda x} \sin \mu x + c_2 e^{\lambda x} \cos \mu x$$

である。ただし、2 次方程式 $t^2 + bt + c = 0$ の解を $t = \lambda \pm \mu i$ とする。
（ここで、式 $t^2 + bt + c = 0$ を**補助方程式（特性方程式）**という。）

証明：　$D^2+bD+c=[D-(\lambda+\mu i)][D-(\lambda-\mu i)]$ であるから、この微分方程式は

$$D^2+bD+c=[D-(\lambda+\mu i)][D-(\lambda-\mu i)]y=0$$

である。方法 **C** によって、一般解は p_1、p_2 を任意定数として

$$y=p_1e^{(\lambda+\mu i)x}+p_2e^{(\lambda-\mu i)x}$$

である。ここでオイラーの公式 (4) を利用して、前述の式を次のように変形する。

$$\begin{aligned} y &= p_1e^{\lambda x}e^{i\mu x}+p_2e^{\lambda x}e^{-i\mu x} \\ &= p_1e^{\lambda x}(\cos\mu x+i\sin\mu x)+p_2e^{\lambda x}(\cos\mu x-i\sin\mu x) \\ &= i(p_1-p_2)e^{\lambda x}\sin\mu x+(p_1+p_2)e^{\lambda x}\cos\mu x \end{aligned}$$

ここで任意定数を次のように書き換えれば、

$$c_1=i(p_1-p_2),\qquad c_2=p_1+p_2$$

一般解は

$$y=c_1e^{\lambda x}\sin\mu x+c_2e^{\lambda x}\cos\mu x$$

となる。

上の方法 **B**、**C**、**D** の纏めとして、次の定理が成り立つ。

定理 1 *2* 階定数係数同次微分方程式

$$y''+by'+cy=0$$

の一般解は、特性方程式 $t^2+bt+c=0$ の解が

1. 実数解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha\neq\beta)$ の場合　$y=c_1e^{\alpha x}+c_2e^{\beta x}$
2. 実数解 α(*2* 重解) の場合　$y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$
3. 虚数解 $\lambda\pm\mu i$ の場合　$y=c_1e^{\lambda x}\sin\mu x+c_2e^{\lambda x}\cos\mu x$

である。