定数係数線形微分方程式

平成 15 年 11 月 27 日

1　定数係数線形微分方程式

定理 1 n 階線形微分方程式 $L(y) = R(x)$ の特殊解を $Y_0(x)$ とする。線形同時微分方程式 $L(y) = 0$ の一般解を $u(x, c_1, \cdots, c_n)$ とする。このとき、微分方程式 $L(y) = R(x)$ の一般解は

$$y = u(x, c_1, \cdots, c_n) + Y_0(x)$$

である。

証明： $y = Y_0(x)$ は $L(y) = R(x)$ の解であるから、

$$L(Y_0(x)) = R(x) \tag{1}$$

である。また、$y = u(x, c_1, \cdots, c_n)$ は $L(y) = 0$ の解であるから、

$$L(u) = 0 \tag{2}$$

である。いま、式 (1) と (2) を利用すれば、

$$L(u + Y_0) = L(u) + L(Y_0) = 0 + R(x) = R(x)$$

となる。ゆえに、$y = u(x, c_1, \cdots, c_n) + Y_0(x)$ は $L(y) = R(x)$ の解であって、n 個の任意定数 $c_1, \cdots, c_n$ を含むから、一般解である。

線形微分方程式の解法

1. $L(y) = 0$ の n 個の解で 1 次独立なもの $u_1(x), \cdots, u_n(x)$ を求める。
2. $L(y) = R(x)$ の特殊解 $Y_0(x)$ を求める。
3. 求める一般解は
$$y = c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x) + Y_0(x)$$
である。ここで、$c_1, \cdots, c_n$ は任意定数である。

$R(x)$	$Y_0(x)$
$ke^{\alpha x}$	$Ce^{\alpha x}$
$kx^n (n = 0, 1, \cdots)$	$K_n x^n + K_{n-1}x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0$
$k \cos \omega x$	$K \cos \omega x + M \sin \omega x$
$k \sin \omega x$	$K \cos \omega x + M \sin \omega x$

表 1: 関数の表

定理 2 定数係数線形微分方程式

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = R(x) \tag{3}$$

では、

1. $R(x)$ は次の表の左側列のどれかの関数と同じものであれば、左側列から同じ行にある関数を $Y_0(x)$ とし、選んだ関数 $Y_0(x)$ およびその関数の導関数を式 *(3)* に代入し、関数の未知係数を求める。

2. もし、前項で選ばれた関数 $Y_0(x)$ は同次微分方程式 $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ の解であるならば、$xY_0(x)$*(*または $x^2 Y_0(x)$*)* を用いる。

3. $R(x)$ は表 *1* の第一列の関数の和であるならば、それぞれの左側列からの関数の和を用いる。

<u>**例題:**</u> **1** 次の微分方程式を解け。

$$y'' + 4y = 8x^2$$

表 *1* より

$$y_0(x) = K_2 x^2 + k_1 x + K_0$$

上式とその式の 2 階微分 *(*$Y_0'' = 2K_2$*)* を微分方程式に代入し

$$2K_2 + 4(K_2 x^2 + K_1 x + K_0) = 8x^2$$

両辺の係数を比較して、未知係数を求める。つまり、未知係数に対して次の式を解く。

$$\begin{aligned} 4K_2 &= 8 \\ 4K_1 &= 0 \\ 2K_2 + 4K_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$K_2 = 2,\ K_1 = 0,\ K_0 = -1$$

ゆえに、$Y_0(x) = 2x^2 - 1$、となり、一般解は

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 2x^2 - 1$$

例題: 2 次の微分方程式を解け。

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

補助方程式

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

の解は $t_1 = 1$ と $t_2 = 2$ であるので、$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ である。$Y_0(x) = Ce^x$ は同次微分方程式の解であるから、Y_0 として Cxe^x を用いる。$Y_0(x) = Cxe^x$ の一階微分 $(Y_0'(x) = C(e^x + xe^x))$ および 2 階微分 $(Y_0''(x) = C(2e^x + xe^x))$ を微分方程式に代入し

$$C(2+x)e^x - 3C(1+x)e^x + 2Cxe^x = e^x$$

$-Ce^x = e^x$ が得られる。ここから $C = -1$。

　微分方程式の一般解は

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x$$

である。