定数係数線形微分方程式：定数変化法による特殊解

クルモフ　バレリー

平成 15 年 12 月 3 日

1　定数係数線形微分方程式の解法（係数変化法）

係数変化法は一般的な解法であるが、今までの解法に比べて多少複雑である。この解法は変数係数を持つ微分方程式に対しても適している。

次の微分方程式を考える。

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = R(x) \tag{1}$$

斉次方程式

$$Ly = 0$$

に一般解を

$$u(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

と書く。簡単のため、$n = 3$ として定数変化法を説明する。このとき、微分方程式は

$$Ly = y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = R(x) \tag{2}$$

である。一般の場合も同様にに考えればよい。

次にのべる内容はラグランジュによる。非斉次微分方程式の特殊解を、斉次方程式の一般解の定数 $c_1, c_2 c_3$ を未知関数 $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$ に取り替え、そして未知関数が式 (2) の特殊解

$$Y_0(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x) \tag{3}$$

になるように求める。

（3）の微分は

$$\begin{aligned} Y_0'(x) &= [c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_3'(x)y_3(x)] \\ &+ c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + c_3(x)y_3'(x) \end{aligned} \tag{4}$$

である。特殊解を求めるのには３つの関数 $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$ を決めればよい。一般に３つの条件を与えれば３つの関数が決まる。そこで、等式 (4) の右辺の括弧の部分が 0、つまり

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_3'(x)y_3(x) = 0 \tag{5}$$

なる条件を付与する。このとき

$$Y_0(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + c_3(x)y_3'(x)$$

となる。この $Y_0'(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} Y_0''(x) &= [c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_3'(x)y_3'(x)] \\ &+ c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_3(x)y_3''(x) \end{aligned}$$

を得る。上と同様に、この等式の右辺の括弧の部分が 0、つまり

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_3'(x)y_3'(x) = 0 \tag{6}$$

なる条件を付与する。このとき

$$Y_0''(x) = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_3(x)y_3''(x)$$

となる。この $Y_0''(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} Y_0'''(x) &= [c_1'(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2''(x) + c_3'(x)y_3''(x)] \\ &+ [c_1(x)y_1'''(x) + c_2(x)y_2'''(x) + c_3(x)y_3'''(x)] \end{aligned}$$

を得る。これらの Y_0, Y_0', Y_0'', Y_0''' を LY_0 に代入し、y_1, y_2, y_3 は $Ly = 0$ の解であることを使うと、

$$\begin{aligned} LY_0 &= c_1'(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2''(x) + c_3'(x)y_3''(x) + [c_1Ly_1 + c_2Ly_2 + c_3Ly_3] \\ &= c_1'(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2''(x) + c_3'(x)y_3''(x) \\ &= R(x) \end{aligned}$$

を得る。$LY_0 = R(x)$ を満たすように $Y_0(x)$ を構成したいのであるから、

$$c_1'(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2''(x) + c_3'(x)y_3''(x) = R(x) \tag{7}$$

を満たすように３つの関数を求めればよい。これから、３つの条件式 (5), (6), (7) を $c_1'(x), c_2'(x), c_3'(x)$ を未知関数とする連立 1 次方程式とみて行列で表現すると、

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ c_3'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R(x) \end{bmatrix} \tag{8}$$

つまり

$$W(x)\bar{c}'(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R(x) \end{bmatrix}$$

である。この連立方程式を $\bar{c}'(x)$ に関して解き、得られた解を積分すると、

$$\bar{c}(x) = \int \bar{c}'(x)dx$$

を得る。したがって、微分方程式 (2) の一般解は

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) + Cy_3(x) + c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x)$$

である。

注：$Y_0(x)$ を計算する前に微分方程式が (1) と同じ形にしなければならない。つまり、y^n の前に係数がある場合、その係数で微分方程式を割る。

例題: 1 次の微分方程式を解け。

$$y'' + y = \sec x \tag{9}$$

解：次の関数は

$$y_1 = \cos x, \qquad y_2 = \sin x$$

同次微分方程式の解である（確認せよ）。W は

$$W(y_1, y_2) = \cos x \cos x - (-\sin x)\sin x = 1$$

である。より

$$\begin{aligned} Y_0 &= -\cos x \int \sin x \sec x dx + \sin x \int \cos x \sec x dx \\ &= \cos x \ln|\cos x| + x \sin x \end{aligned}$$

よって、一般解は

$$y = u + Y_0 = [c_1 + \ln|\cos x|]\cos x + (c_2 + x)\sin x$$

である。