システム制御工学特論

2026年4月21日

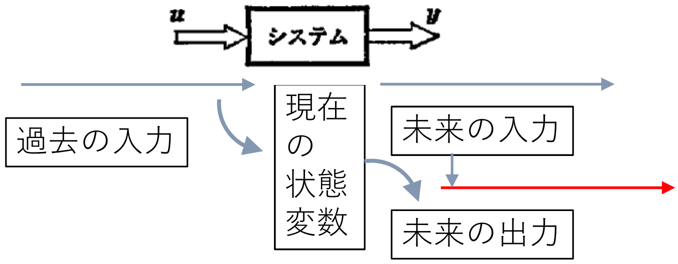
講義予定

- 状態方程式とは
- 微分方程式→伝達関数
- 微分方程式→状態方程式
- 伝達関数→状態方程式
- 状態方程式→伝達関数
- 伝達関数→微分方程式→状態方程式（一般化）

例題をもとに

状態変数とは

過去の入力をまとめて表す。
未来の出力が、現在の状態変数と、未来の入力で決まる。



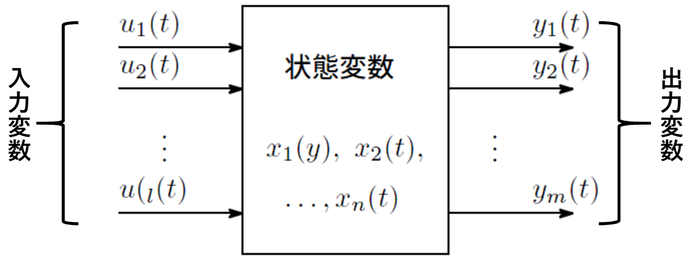
状態方程式の一般形

状態方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$

出力方程式 $\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t)$

制御系

状態方程式の利点：多入力、多出力系を表すことができる



多入力－多出力

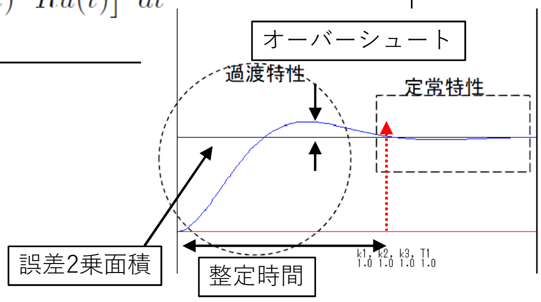
$$
\begin{aligned}
\text{入力変数}\vec{u}(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_l(t) \end{bmatrix}^T \\
\text{出力変数}\vec{y}(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_m(t) \end{bmatrix}^T \\
\text{状態変数}\vec{x}(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{状態方程式：}\quad \dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \\
\text{出力方程式:：}\quad \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t)
\end{aligned}
$$

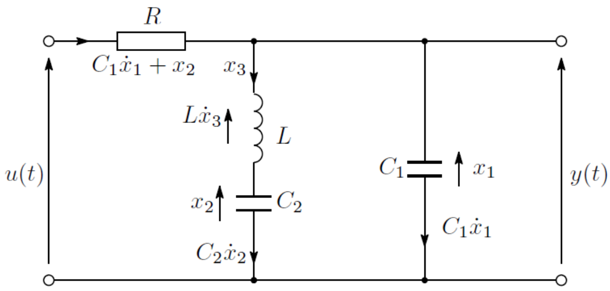
状態方程式の利点

1. 多入力、多出力系を表すことができる。
2. 初期値の影響が表せる。
3. 安定性判定が固有値計算で出来る。
4. 過渡応答の計算が指数関数で出来る。
5. 可制御、可観測が定義できる。
6. システムの非可制御、非可観測の部分も表現できる
7. 最適レギュレータが設計できる→誤差2乗面積：最小

$$J = \int_0^\infty \left[\vec{x}(t)^T Q \vec{x}(t) + \vec{u}(t)^T R \vec{u}(t)\right] dt$$

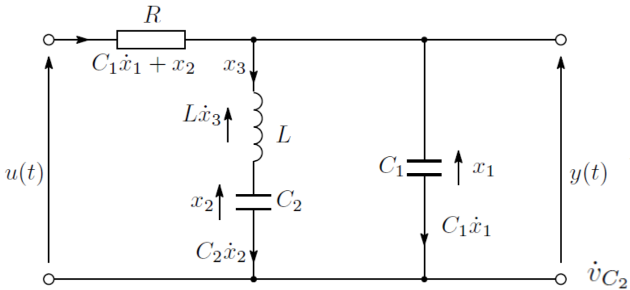


電気システムのモデル



コンデンサ	$i(t) = C\dot{v}(t)$,	(または $v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + v(0)$)
抵　抗	$v(t) = Ri(t)$	R: 抵抗
コイル	$v(t) = L\dot{i}(t)$	L: インダクタンス

電気システムのモデル



$$i_L(t) = C_2\dot v_{C_2}(t) \quad (1)$$

$$L\dot i_L + v_{C_2}(t) = v_{C_1}(t) \quad (2)$$

$$R(i_L(t) + C_1\dot v_{C_1}(t)) + v_{C_1}(t) = u(t) \quad (3)$$

(1) を (3)、(1) を (2) に代入し、

$$\dot v_{C_2}(t) = \frac{1}{RC_2}u(t) - \frac{1}{RC_2}v_{C_1}(t) - \frac{C_1}{C_2}\dot v_{C_1}(t) \quad (4)$$

$$LC_2\ddot v_{C_2}(t) + v_{C_2}(t) = v_{C_1}(t) \quad (5)$$

(4) を (5) に代入する。

$$\frac{L}{R}\dot u(t) - \frac{L}{R}\dot v_{C_1}(t) - LC_1\ddot v_{C_1}(t) + \int\left(\frac{1}{RC_2}u(t) - \frac{1}{RC_2}v_{C_1}(t) - \frac{C_1}{C_2}\dot v_{C_1}(t)\right)dt = v_{C_1}(t) \quad (6)$$

微分

$$\frac{L}{R}\ddot u(t) - \frac{L}{R}\ddot v_{C_1}(t) - LC_1\dddot v_{C_1}(t) + \frac{1}{RC_2}u(t) - \frac{1}{RC_2}v_{C_1}(t) - \frac{C_1}{C_2}\dot v_{C_1}(t) = \dot v_{C_1}(t) \quad (7)$$

(7) 中に v_{C_1} を y

$$\dddot y(t) + \frac{1}{RC_1}\ddot y(t) + \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}\dot y(t) + \frac{1}{RLC_1C_2}y(t) = \frac{1}{RC_1}\ddot u(t) + \frac{1}{RLC_1C_2}u(t)$$

電気システムのモデル ⟹ 伝達関数

$$\dddot y(t) + \frac{1}{RC_1}\ddot y(t) + \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}\dot y(t) + \frac{1}{RLC_1C_2}y(t) = \frac{1}{RC_1}\ddot u(t) + \frac{1}{RLC_1C_2}u(t)$$

⇓ ラプラス変換

$$\left(s^3 + \frac{1}{RC_1}s^2 + \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}s + \frac{1}{RLC_1C_2}\right)Y(s) = \left(\frac{1}{RC_1}s^2 + \frac{1}{RLC_1C_2}\right)U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{RC_1}s^2 + \frac{1}{RLC_1C_2}}{s^3 + \frac{1}{RC_1}s^2 + \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}s + \frac{1}{RLC_1C_2}}$$

$$G(s) = \frac{LC_2s^2 + 1}{LRC_1C_2s^3 + LC_2s^2 + R(C_1 + C_2)s + 1}$$ ⟸ **伝達関数**

微分方程式 → 状態方程式　（その1）

$$\dddot{y}(t) + \frac{1}{RC_1}\ddot{y}(t) + \frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}\dot{y}(t) + \frac{1}{RLC_1C_2}y(t) = \frac{1}{RC_1}\dot{u}(t) + \frac{1}{RLC_1C_2}u(t)$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x_1(t) &=& y(t) \\ x_2(t) &=& \dot{y}(t) \\ x_3(t) &=& \ddot{y}(t) \end{array}}$$

を設定する。　代入

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) &=& x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &=& x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &=& -\frac{1}{RC_1}x_3(t) - \frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}x_2(t) - \frac{1}{RLC_1C_2}x_1(t) + \frac{1}{RC_1}\dot{u}(t) + \frac{1}{RLC_1C_2}u(t) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{RLC_1C_2} & -\frac{C_1+C_2}{LC_1C_1} & -\frac{1}{RC_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{RLC_1C_2} & 0 & \frac{1}{RC_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

状態方程式

9

微分方程式 → 状態方程式　（その2）

記述式 (1), (2), (3) → 状態方程式

$$\begin{array}{rcll} i_L(t) &=& C_2\dot{v}_{C_2}(t) & (1) \\ L\dot{i}_L + v_{C_2}(t) &=& v_{C_1}(t) & (2) \\ R(i_L(t) + C_1\dot{v}_{C_1}(t)) + v_{C_1}(t) &=& u(t) & (3) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x_1(t) &=& v_{C_1}(t) \\ x_2(t) &=& v_{C_2}(t) \\ x_3(t) &=& i_L(t) \end{array}}$$

代入

システムの状態変数

$$\begin{array}{rcl} x_3(t) &=& C_2\dot{x}_2(t) \\ L\dot{x}_3 + x_2(t) &=& x_1(t) \\ R(x_3(t) + C_1\dot{x}_1(t)) + x_1(t) &=& u(t) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) &=& -\frac{1}{RC}x_1(t) - \frac{1}{C_1}x_3(t) + \frac{1}{RC_1}u(t) \\ \dot{x}_2(t) &=& \frac{1}{C_2}x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &=& \frac{1}{L}x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t) \end{array}$$

次のスライド

10

微分方程式 → 状態方程式　（その2）のつづき

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)
$$

$$
y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}
$$

状態方程式

伝達関数→微分方程式→状態方程式

伝達関数：初期値＝0→微分方程式→状態方程式

しかし、状態方程式では、初期値の場合も考えることができる。
（ラプラス変換による微分方程式の解き方：初期値が出てくる。

初期値の項

$$
a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t) \quad \longrightarrow \quad G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} + \frac{K(s)}{D(s)}
$$

$$
(D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)
$$

伝達関数→微分方程式→状態方程式

（分子が定数）

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}$$

$$\begin{aligned}
(s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1) Y(s) &= b_0 U(s) \leftarrow \text{Laplace 逆変換} \\
\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) &= b_0 u(t)
\end{aligned}$$

13

状態変数の定義：

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = b_0 u(t)$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= x_1 \\
\frac{dy(t)}{dt} &= x_2 = \dot{x}_1 \\
\frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= x_3 = \dot{x}_2 \\
\vdots &= \vdots \\
\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} &= x_n = \dot{x}_{n-1} \\
\dot{x}_n &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n + b_0 u \\
y(t) &= y = x_1
\end{aligned}$$

必ず状態変数として何を選ぶか書く

14

行列形式へ書き直す：

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

状態方程式

出力方程式

15

伝達関数→微分方程式→状態方程式

（分子が多項式）

教科書にはない

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1} \\
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \left(\frac{1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}\right)(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0) \\
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \left(\frac{V(s)}{U(s)}\right)\left(\frac{Y(s)}{V(s)}\right) \quad \leftarrow \text{ダミー変数 } V(s) \text{ を導入} \\
\frac{V(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1} \\
(s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1)V(s) &= U(s) \quad \leftarrow \text{Laplace 逆変換} \\
\frac{d^n v(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1}v(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dv(t)}{dt} + a_1 v(t) &= u(t)
\end{aligned}
$$

16

$$\frac{d^n v(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dv(t)}{dt} + a_1 v(t) = u(t)$$

状態変数を定義：

$$\begin{aligned} v(t) &= x_1 \\ \frac{dv(t)}{dt} &= x_2 = \dot{x}_1 \\ \frac{d^2 v(t)}{dt^2} &= x_3 = \dot{x}_2 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} &= x_n = \dot{x}_{n-1} \\ \frac{d^n v(t)}{dt^n} &= \dot{x}_n \end{aligned}$$

必ず状態変数として
何を選ぶか書く

$$\dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n + u \qquad (*)$$

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{V(s)} &= b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0 \\ Y(s) &= (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0) V(s) \leftarrow \text{Laplace 逆変換} \\ y(t) &= b_n \frac{d^n v(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} v(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{dv(t)}{dt} + b_0 v(t) \\ y &= b_n \dot{x}_n + b_{n-1} x_n + \cdots + b_1 x_2 + b_0 x_1 \leftarrow (*)\text{より } \dot{x}_n \text{ を代入する。} \\ y &= b_n(-a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n + u) + b_{n-1} x_n + \cdots + b_1 x_2 + b_0 x_1 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$y = (b_0 - b_n a_1) x_1 + (b_1 - b_n a_2) x_2 + \cdots + (b_{n-1} - b_n a_n) x_n + b_n u$$

行列形式:

教科書にはない

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_1 & b_1 - b_n a_2 & \ldots & b_{n-2} - b_n a_{n-1} & b_{n-1} - b_n a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u$$

19

$b_n = 0$ の場合、出力式：

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

20

伝達関数→微分方程式→状態方程式:例題

伝達関数： $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{3}{(s+1)(s+2)}$

微分方程式：

$$\begin{aligned}(s+1)(s+2)Y(s) &= 3U(s)\\ (s^2+3s+2)Y(s) &= 3U(s)\\ \ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t) &= 3u(t)\end{aligned}$$

状態変数： $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$

必ず状態変数として何を選ぶか書く

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 3x_2 + 3u\end{aligned}$$

状態方程式

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}u\\ y &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{aligned}}$$

伝達関数→微分方程式→状態方程式:例題

伝達関数： $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}$

微分方程式

$$\begin{aligned}(s+1)(s+2)Y(s) &= (s+3)U(s)\\ (s^2+3s+2)Y(s) &= (s+3)U(s)\\ \ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t) &= \dot{u}+3u(t)\end{aligned}$$

状態変数： $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 3x_2 + \dot{u} + 3u\end{aligned}$$

状態方程式

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y &= \begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{aligned}}$$

状態方程式→伝達関数

$$\begin{array}{lrcl} \text{状態方程式：} & \dot{\vec{x}}(t) & = & A\vec{x}(t)+B\vec{u}(t) \\ \text{出力方程式:：} & \vec{y}(t) & = & C\vec{x}(t) \end{array}$$

初期値＝０としている

$$\begin{array}{lrcl} \text{ラプラス変換　状態方程式} & sX(s) & = & AX(s)+BU(s) \\ \text{出力方程式} & Y(s) & = & CX(s) \end{array}$$

$X(s)$ でまとめる $sX(s)-AX(s) \;=\; BU(s) \;\rightarrow\; (sI-A)X(s)=BU(s)$

$X(s)$ でまとめる $X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$

$$\begin{array}{lrcl} \text{出力方程式へ代入} & Y(s) & = & \{C(sI-A)^{-1}\}BU(s) \\ \text{伝達関数行列} & G(s) & = & \dfrac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B \end{array}$$

多入力多出力

状態方程式→伝達関数：例題

多入出力システム、

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&1&0\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

においては、伝達関数行列は

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix}3&1&0\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\0&0&s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3&1&0\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/s&1/s^2&1/s^2\\0&1/s&1/s^2\\0&0&1/s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{s^3}&\dfrac{3}{s}\\[2ex] \dfrac{(s+1)(s+2)}{s^3}&\dfrac{2}{s}\end{bmatrix}$$