Lyapunov方程式と安定判別

1. リャプノフ方程式
2. 出力の2乗面積の計算
3. リャプノフの安定性に定義
4. リャプノフの安定定理
5. 非線形の安定性
6. 線形の安定性

2026年度 講義予定 –シラバス通り–

回	開講	内容	
1	4/14	制御工学の概要、**講義の予定**	
2	4/21	動的システムと状態方程式	
3	4/28	状態方程式の解とシステムの安定性理論	
4	5/12	リャプノフ安定性理論	
5	5/19	可制御性・可観測性と線形システムの等価変換	
6	5/26	レギュレータと同一次元オブザーバの設計	
7	6/02	最小次元オブザーバの設計（その１）	
8	6/09	最小次元オブザーバの設計（その２）	
9	6/16	演習	
10	6/23	定常誤差と開ループシステムの型およびサーボ系の設計法I	
11	6/30	サーボ系の設計法 II	
12	7/07	演習	
13	7/14	達成度確認試験	
14	7/21	最適レギュレータの設計	
15	7/28	非線形制御の導入	
16	8/04	現代制御理論の新しい話題	

リャプノフ方程式

$$\boxed{PA + A^T P = -Q \ \Leftarrow\ \text{Lyapunov 方程式}}$$

$P(n \times n)$: 未知行列

ここで、

1. A の固有値 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

   $\lambda_i + \lambda_j \neq 0 \ \ (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$

2. Q は**対称行列**とする。

線形系安定性の必要十分条件

定理: $Q > 0$ または $Q \geq 0$ で，かつ

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ Q^{1/2}A \\ \vdots \\ Q^{1/2}A^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

となる Q を決定する。このとき、A が安定行列であるための必要十分条件は、$PA + A^T P = -Q$ の解が $P > 0$ である。

線形系安定性の必要十分条件（つづき）

$Q = C^T C$ を与えると

可観測性（章4-1）

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

となる。

評価関数

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\infty |e|\,dt \text{ 誤差面積} \\ J_2 &= \int_0^\infty e^2\,dt \text{ 二乗誤差面積} \\ J_3 &= \int_0^\infty t|e|\,dt \\ J_4 &= \int_0^\infty te^2\,dt \\ J_5 &= \int_0^\infty t^2e^2\,dt \end{aligned}$$

←もっともよく使われる

他は使わない

評価関数の条件：最小値が存在すること

出力の2重面積の計算

漸近安定な線形系　$\dot{\vec{x}}(t) = Ax(t)$、　出力　$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t)$ について

2乗積分誤差
（誤差2乗面積）

$$J = \int_0^\infty \vec{x}(t)^T Q \vec{x}(t)\, dt,\ Q \geq 0 \text{ は重み行列}$$

$$Q = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$$

$$J = \int_0^\infty \left[q_1 x_1^2(t) + q_2 x_2^2(t) + \cdots + q_n x_n^2(t)\right] dt$$

出力の2重面積の計算

漸近安定な線形系　$\dot{\vec{x}}(t) = Ax(t)$、　出力　$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t)$ について

誤差2乗面積

$$J = \int_0^\infty \vec{y}(t)^T \vec{y}(t)\, dt = \int_0^\infty \boxed{(y_1^2(t) + y_2^2(t) + \cdots + y_m^2(t))}\, dt$$

$$\begin{aligned} \boxed{y_1^2(t) + y_2^2(t) + \cdots + y_m^2(t)} &= \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_m(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \\ &= \vec{y}^T(t)\vec{y}(t) = (C\vec{x}(t))^T(C\vec{x}(t)) = \vec{x}^T(t) C^T C \vec{x}(t) \end{aligned}$$

$$J = \int_0^\infty \vec{y}(t)^T \vec{y}(t)\, dt = \int_0^\infty \boxed{\vec{x}(t)^T C^T C \vec{x}(t)}\, dt$$

出力の2重面積の計算

漸近安定な線形系　$\dot{\vec{x}}(t) = Ax(t)$、　出力　$\vec{y}(t) = C\vec{x}(t)$ について

誤差2乗面積を計算する　$J = \int_0^\infty \vec{y}(t)^T \vec{y}(t)\,dt = \int_0^\infty \vec{x}(t)^T C^T C \vec{x}(t)\,dt$

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^\infty \vec{x}^T Q \vec{x}\,dt \\
&= -\int_0^\infty \left[\vec{x}^T (A^T P + PA)\vec{x}\right] dt = -\int_0^\infty \left[\dot{\vec{x}}^T P\vec{x} + \vec{x}^T P\dot{\vec{x}}\right] dt \\
&= -\int_0^\infty \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{x}^T P\vec{x}\right)\right] dt = -\vec{x}^T P\vec{x}\Big|_0^\infty \\
&= -\vec{x}(\infty)^T P\vec{x}(\infty) + \vec{x}(0)^T P\vec{x}(0)
\end{aligned}
$$

漸近安定なシステムなので、$\vec{x}(\infty) = \vec{0}$ となり、$\boxed{J = \vec{x}(0)^T P\vec{x}(0)}$ で計算される。

9

演習問題：

図1の系に単位ステップ入力が入るとき二乗誤差面積を求めよ。また、これが最小となるように ζ を求めよ。

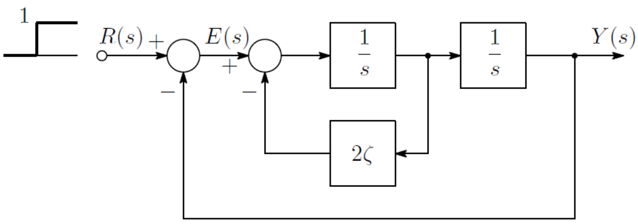


Figure 1: 2 次系

1. 状態方程式を求める。
2. P を計算する。
3. J を求める。
4. J 最小の ζ を求める。

$$J = \int_0^\infty e^2\,dt$$ 二乗誤差面積を計算する。

10

演習問題：

1. 状態方程式を求める。

   (a) $R(s)$ から $E(s)$ までの伝達関数を求める。

$$E(s) = \frac{s^2 + 2\zeta s}{s^2 + 2\zeta s + 1} R(s)$$

   (b) 微分方程式を求める。

$$\ddot{e}(t) + 2\zeta\dot{e}(t) + e(t) = \ddot{r}(t) + 2\zeta\dot{r}(t)$$

$$\ddot{e}(t) + 2\zeta\dot{e}(t) + e(t) = 0 \quad \leftarrow \quad \text{なぜ}$$

   (c) 状態方程式

11

演習問題：

(c) 状態方程式

状態変数：$e = x_1,\ \dot{e} = \dot{x}_1 = x_2$ とおくと（状態方程式の誤差部）

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$e = x_1 = C\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

よって、$J = \int_0^\infty e^2\,dt = \int_0^\infty \vec{x}^T C^T C \vec{x}\,dt, \quad C^T C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

12

演習問題：

2. P を計算する。（リャプノフ方程式）

$$PA + A^T P = -Q$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

これを解いて、

$$P = \begin{bmatrix} \zeta + \frac{1}{2\zeta} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\zeta} \end{bmatrix}$$

13

演習問題：

誤差2乗面積 J

$$J = \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta + \frac{1}{2\zeta} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \left(\zeta + \frac{1}{2\zeta}\right) x_1^2(0) + x_1(0)x_2(0) + \frac{1}{2\zeta} x_2^2(0)$$

ステップ入力より、$x_1(0) = e(0) = 1,\ x_2(0) = 0$ を J に代入して、

$$J = \zeta + \frac{1}{2\zeta}$$

14

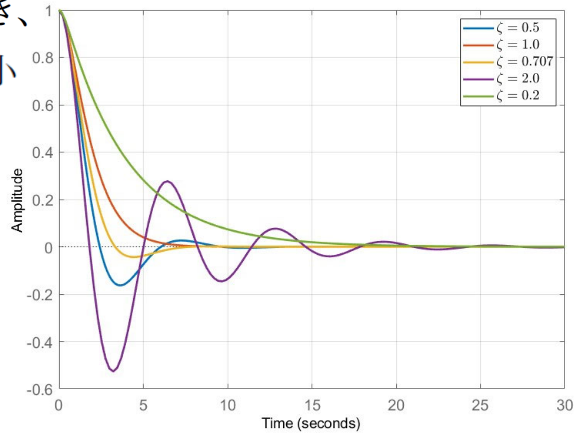
演習問題：

J が最小になるように ζ を求めよ。

$$\frac{dJ}{d\zeta} = 1 - \frac{1}{2\zeta^2} = \frac{2\zeta^2 - 1}{2\zeta^2} = 0$$

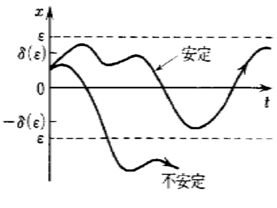
より、$2\zeta^2 - 1 = 0$ から $\zeta = 0.707$ のとき、

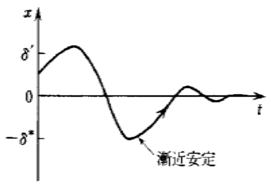
誤差が最小

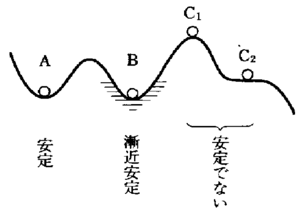


平衡点の安定性の定義（リャプノフ安定性の定義）

安定⇔平衡点近くの初期値で出発し、状態変数*x*有限
漸近安定⇔平衡点近くの初期値で出発し、
t→∞のとき状態変数*x*→*0*
制御工学Aの講義の「安定」=この講義の「漸近安定」
大域漸近安定⇔全ての初期値で出発し、
t→∞のとき状態変数*x*→*0*





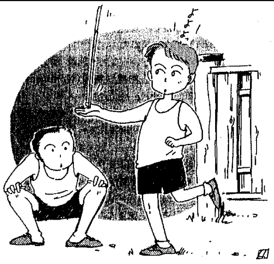


16

平衡点の不安定、漸近安定

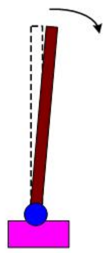
平衡点：状態方程式の$u(t)$=0のとき

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{x=x_0} = f(x_0, 0) = 0$$ となるx_0



不安定な平衡点

ほっておくと元の状態から大きく動く



漸近安定な平衡点

ほっておいても元の状態へ戻る

状態変数とは：非線形系の時

過去の入力をまとめて表す。
未来の出力が、現在の状態変数と、未来の入力で決まる。

過去の入力

現在の状態変数

未来の入力

未来の出力

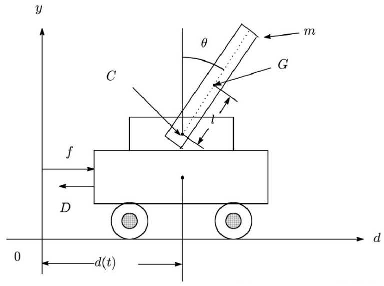
線形系の状態方程式

状態方程式 $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$　　出力方程式 $y(t) = Cx(t)$

非線形系に拡張→非線形系の状態方程式

状態方程式 $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t))$　　出力方程式 $y(t) = h(x(t), u(t))$

非線形の例：倒立振子



$$(m_c+m)\ddot{d}(t)+ml\cos\theta(t)\ddot{\theta}(t)-ml\sin\theta(t)\dot{\theta}^2(t)+D\dot{d}(t)=f(t)$$

$$ml\cos\theta(t)\ddot{d}+ml^2\ddot{\theta}(t)+J\ddot{\theta}(t)+c\dot{\theta}(t)-mgl\sin\theta(t)=0$$

$$\begin{bmatrix} mc+m & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & ml^2+J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{d}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ml\sin\theta(t)\dot{\theta}^2(t)-D\dot{d}(t)+f(t) \\ mgl\sin\theta(t)-c\dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{d}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix}=\frac{1}{(m_c+m)(ml^2+J)-m^2l^2\cos^2\theta(t)}\begin{bmatrix} ml^2+J & -ml\cos\theta(t) \\ -ml\cos\theta(t) & m_c+m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ml\sin\theta(t)\dot{\theta}^2(t)-D\dot{d}(t)+f(t) \\ mgl\sin\theta(t)-c\dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

状態変数　入力：台車加速度

$$\bar{x}=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d(t) \\ \theta(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}=\ddot{r}$$

状態方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))$$

sin、cos、変数の積、2乗を含む
→非線形

$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t)$ の形をしていない

非線形系の安定性

教科書80～82頁

非線形系： 状態方程式 $\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))$ **固有値は計算できない。**

安定性を判定する唯一の方法：**<u>リャプノフ法</u>**

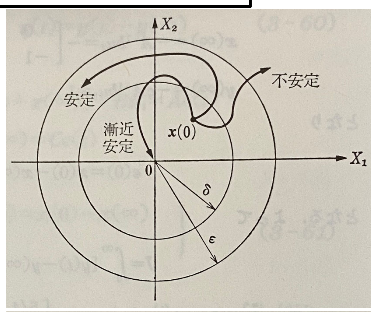
<u>リャプノフの安定定理：</u>$\vec{x}(t)$ を状態ベクトルとし、系を

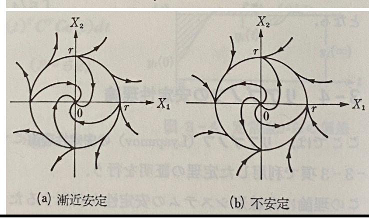
$$\dot{\vec{x}}=\vec{f}(x)$$

のように表すとき、この系は次の５つの条件を満足し、連続な１階偏導関数を持つ連続な実数値スカラ関数 $V(\vec{x})$ が存在すれば、大域漸近安定である。

1. $V(0)=0$
2. $\vec{x}\neq 0$ のとき $V(\vec{x})>0$（正定値）
3. $\vec{x}\to\infty$ のとき $V(\vec{x}))\to\infty$
4. 解軌道にそった時間微分 $\dot{V}(\vec{x})\leq 0$（$\dot{V}(\vec{x})$ は準負定置）
5. $\vec{x}\neq 0$ の解軌道上で $\dot{V}(\vec{x})$ は恒等的に 0 ではない。

上記の条件を満たす関数 $V(\vec{x})$ をリャプノフ関数という。

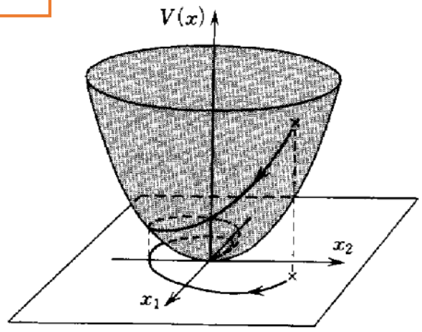




ここで、 $\frac{dV(t)}{dt}=\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt}=\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$

非線形系の安定性

リャプノフ関数　$V(\boldsymbol{x}(t)) > 0$　正定値
解に沿って傾き　$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) \le 0$
解に沿って動くと、やがて　$V(\boldsymbol{x}(t)) \to 0$
すなわち、　$\boldsymbol{x}(t) \to 0$



リャプノフ関数の存在⇒安定
(安定であるための十分条件)
1つでもリャプノフ関数があれば安定
リャプノフ関数がなくても、
不安定とは限らない

非線形系
リャプノフ関数がある $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 安定

線形系
リャプノフ関数がある $\underset{\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 安定

非線形系の安定性

解に沿って傾き
$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))$ の計算

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad V(\mathbf{x}(t)) = V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \mathrm{grad}V \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

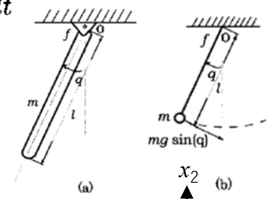
ベクトルの内積

$$= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

非線形系の安定性：例題

劉 康志, 申 鉄龍：現代制御理論痛論, 培風館_179頁 例8.5

振子：運動方程式 $ml\dfrac{d^2q}{dt^2} = -mg\sin q - fl\dfrac{dq}{dt}$

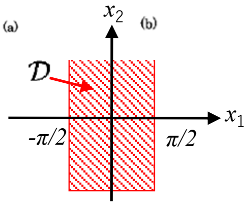


状態変数 $x_1 = q, x_2 = \dot{q}$

状態方程式

$\dot{x} = f(x)$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{f}{m}x_2 - \frac{g}{l}\sin x_1 \end{bmatrix}$

領域 $\quad \mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leqq \frac{\pi}{2},\ |x_2| \leqq \infty\}$



リャプノフ関数 $\quad k>0 \quad a>0$ 定数

$$V(x_1, x_2) = k(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}(x_1 + a x_2)^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

リャプノフ関数の微分

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}$$

$$= \{k\sin x_1 + (x_1 + a x_2)\}\dot{x}_1 + \{a(x_1 + a x_2) + x_2\}\dot{x}_2$$

23

非線形系の安定性：例題

リャプノフ関数の微分

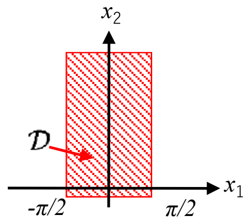
$$\dot{V} = \{k\sin x_1 + (x_1 + a x_2)\}\dot{x}_1 + \{a(x_1 + a x_2) + x_2\}\dot{x}_2$$

$$= \{k\sin x_1 + x_1 + a x_2\}x_2 + \{a x_1 + (a^2 + 1)x_2\}\left(-\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{f}{m}x_2\right)$$

$$= \underbrace{\{k - (1 + a^2)\frac{g}{l}\}}_{=0} x_2 \sin x_1 + \underbrace{(1 - a\frac{f}{m})}_{=0} x_1 x_2 - a\frac{g}{l}x_1\sin x_1 + \{\underbrace{a(1 - a\frac{f}{m})}_{=0} - \frac{f}{m}\}x_2^2$$

定数 $\quad a = \dfrac{m}{f},\quad k = (1 + a^2)\dfrac{g}{l}\quad$ とおくと

$$\dot{V} = \boxed{-\frac{mg}{fl}x_1\sin x_1} \boxed{-\frac{f}{m}x_2^2} \rightarrow \mathcal{D}で\ \ \dot{V}(x_1, x_2) < 0$$



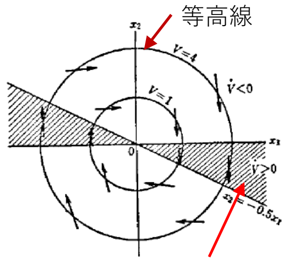
漸近安定

24

線形系の例題

松村：自動制御、朝倉書店、p.124

次の式で表される系の
リャプノフ関数を求めよ。 $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$



(1) $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$

$= 2x_1x_2 + 2x_2(-2x_1 - 2x_2)$

$= -2x_2(x_1 + 2x_2)$

右図、斜線部分で $\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) > 0$
⇒安定かどうか不明

(2) $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 正定値

$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 + \dot{x}_1x_2 + x_1\dot{x}_2$

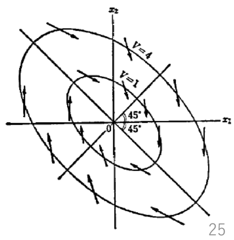
$= -2x_1^2 - 4x_1x_2 - 3x_2^2$

$= -[x_1 x_2] \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leqq 0$

($\boldsymbol{x} = 0$ のときのみ $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0$)

右図、全ての部分で
$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) \leq 0$

⇒安定



25

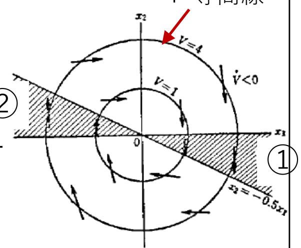
線形系の例題

(1) $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 正定値

$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$

$= 2x_1x_2 + 2x_2(-2x_1 - 2x_2)$

$= -2x_2(x_1 + 2x_2)$



$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) > 0$ 正の範囲

$-2x_2(x_1 + 2x_2) > 0 \Rightarrow 2x_2(x_1 + 2x_2) < 0$

$\Rightarrow \quad x_2 < 0 \text{ and } (x_1 + 2x_2) > 0$ or $x_2 > 0 \text{ and } (x_1 + 2x_2) < 0$

$\Rightarrow \quad x_2 < 0 \text{ and } x_2 > -\frac{1}{2}x_1$ ① or $x_2 > 0 \text{ and } x_2 < -\frac{1}{2}x_1$ ②

26

線形系の例題

(2)

$$V(\mathbf{x}) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_1 x_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

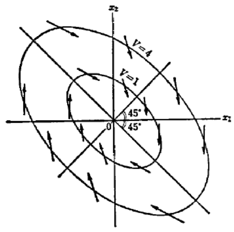
正定値であることの証明
(a)固有値を計算→λ=3/2、1>0
(b)完全平方の形にする

$$V(\mathbf{x}) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_1 x_2$$

$$= \left(x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right)^2 + x_2^{\ 2} - \frac{1}{4} x_2^{\ 2}$$

$$= \left(x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right)^2 + \frac{3}{4} x_2^{\ 2}$$

完全平方の形



線形系の例題

(2)

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 + \dot{x}_1 x_2 + x_1\dot{x}_2$$

$$= -2x_1^2 - 4x_1x_2 - 3x_2^2$$

$$= -[x_1 x_2]\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leqq 0$$

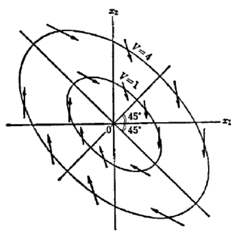
($\boldsymbol{x}=0$ のときのみ $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$)

負定値であることの証明
(a)固有値を計算
→$\lambda= -\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{17})$ =-0.44, -4.56
(b)完全平方の形にする

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -2x_1^{\ 2} - 4x_1x_2 - 3x_2^{\ 2}$$

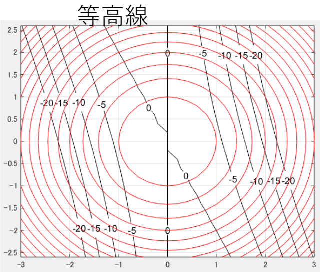
$$= -2(x_1 - x_2)^2 - x_2^{\ 2}$$

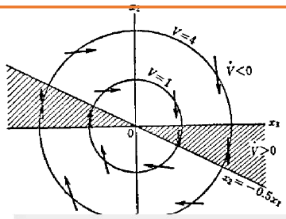
完全平方の形



松村：自動制御、朝倉書店、p.124例題7 L y apunov関数 1

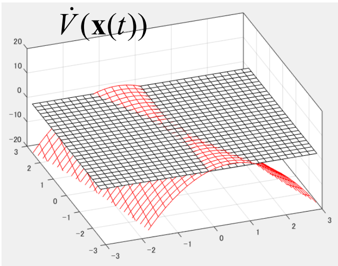
等高線

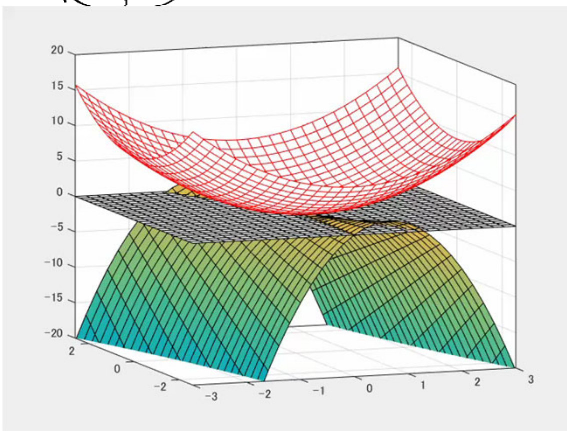




$$V(\mathbf{x}) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}$$

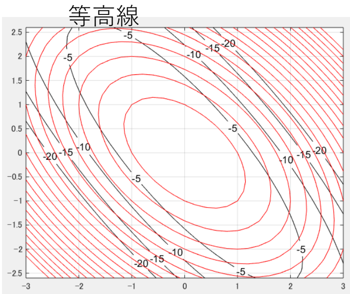
$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) = -2x_2(x_1 + 2x_2)$$

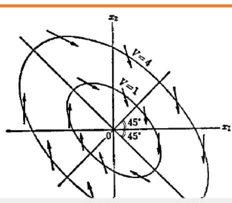




松村：自動制御、朝倉書店、p.124例題7 L y apunov関数 2

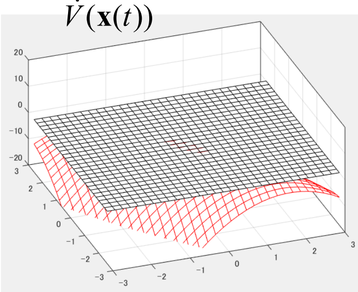
等高線

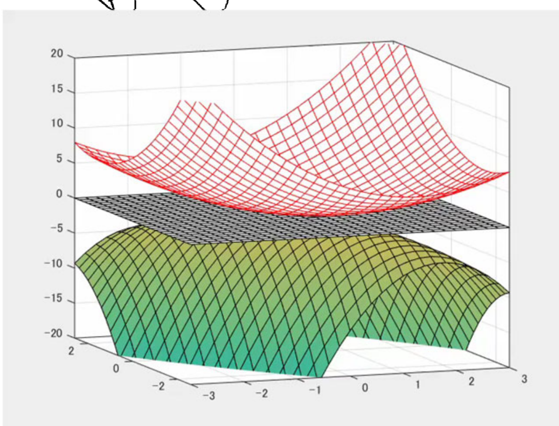




$$V(\mathbf{x}) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_1 x_2$$

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) = -2x_2(x_1 + 2x_2)$$





線形系のリャプノフの定理

教科書p.83

線形系 $\dot{x}(t) = Ax(t)$ の $x(0)=0$ 漸近安定

⇔どのような正定値行列Qに対して、

リャプノフの方程式 $A^T P + PA = -Q$

を満たす正定値行列Pが存在すること。

このとき $V(x) = x^T Px$ リャプノフ関数になっている

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} = (Ax)^T Px + x^T P(Ax)$$
$$= x^T A^T Px + x^T PAx = x^T(A^T P + PA)x$$
$$= -x^T Qx \leqq 0$$

線形系

リャプノフ関数が存在⇔安定

31

線形系の例題

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x$$

のリャプノフ関数を求める

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

特性多項式 s^2+2s+2

固有値 -1+1j, -1-1j

実数部＜０ →安定

正定値行列$Q=I$とする。

Pとして $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$ とおき、p_{11}, p_{12}, p_{22} を未知数とする

Pは対称行列とできるので，(2.1)成分もp_{12}とおける

リャプノフの方程式 $A^T P + PA = -Q$に代入

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)式$$

p_{11}, p_{12}, p_{22} をもとめ、$p_{11}=5/4$, $p_{12}=1/4$, $p_{22}=3/8$

$$P = \begin{bmatrix} 5/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/8 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (3)式$$

Pの固有値= $(13 \pm \sqrt{65})/16$

=0.31, 1.32

$$V(x) = \frac{1}{8}[x_1 \ x_2]\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}(10x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2) = \frac{5}{4}\left(x_1 + \frac{1}{5}x_2\right)^2 + \frac{13}{5}x_2^2$$

32

Pの計算

正定値行列$Q=I$とする。

Pとして $P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$ とおき、 p_{11}, p_{12}, p_{22},を未知数とする

リャプノフの方程式 $A^T P + PA = -Q$ に代入

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1.1)成分の式：$-2p_{12}-2p_{12}=-1$　　（2）式

(1.2)成分の式：$-2p_{22}+p_{11}-2p_{12}=0$← (2.1)成分の式と同じ

(2.2)成分の式： $p_{12}-2p_{22}+p_{12}-2p_{22}=-1$

これを解いて,

$$p_{11}=5/4,\ p_{12}=1/4,\ p_{22}=3/8$$

$$P=\begin{bmatrix} 5/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/8 \end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$　　(3）式

が求まる.

ヒント：

演習課題 (1)

リャプノフ関数 $V(\boldsymbol{x})=\frac{1}{8}[x_1\ x_2]\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{8}(10x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2)$

を微分して,　　(4）式

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{8}\left(10\times 2\dot{x}_1x_1+4\dot{x}_1x_2+4x_1\dot{x}_2+3\times 2x_2\dot{x}_2\right)$$

状態方程式より, $\dot{x}_1=x_2, \dot{x}_2=-2x_1-2x_2$ を代入して,

$\dot{V}(\boldsymbol{x})\le 0$ 　となることを確かめる.

岡山大学工学部 2023 年度 4 学期

制御工学 B 月木 5・6　担当 クルモフ

第 6 回演習問題 12 月 21 日出題

提出〆切：1 月 4 日 (金)

学籍番号		
氏名		

1. 式 (1) のシステムについて次の問題を解けよ。
   (a) 推移行列を求めよ。
   (b) 伝達関数を求めよ。
   (c) Laplace 逆変換を用いて、ステップ入力が与えられたとき、解 $y(t)$ を求めよ。
   (d) 状態方程式を解き、解 $y(t)$ が全問 (1c) の解と一致しているかを確認せよ（教科書 [例題 3-2] を参照)。問題（1c）の解と問題（1d）の解が一致していない場合、その理由について述べよ。
   (e) 出力 $y(t)$ の定常値（$\lim_{t\to\infty} y(t)$）を計算せよ。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

2. 図 1 の系について、以下の問に答えよ。
   (a) $R(s)$ から $E(s)$ までの伝達関数を求めよ。
   (b) 単にステップ入力が入るときの $e(t)$ を出力し、状態方程式を求めよ。
   (c) 単にステップ入力が入るときの $e(t)$ の 2 乗誤差面積 J を求めよ。
   (d) J が最小になるように ζ を求めよ。

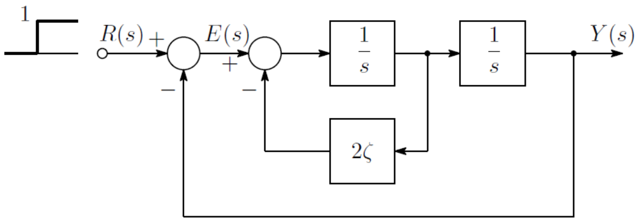


図 1: 2 次系