行列論の復習と線形時不変システムの応答

Lecture 2

2024/4/23

1. 行列理論の復習
2. 状態方程式
3. 線形時不変システム（状態方程式）の応答
4. 状態推移行列の求め方

行列の復習

1. 行列、ベクトルの定義
2. 行列の和算、乗算
3. 行列式

行展開 (任意 i 番目の行 $1 \leq i \leq n$ について展開)：

$$\boxed{|A| \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}}$$

列展開 (任意 j 番目の列 $(1 \leq j \leq n$ について展開)：

$$\boxed{|A| \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}}$$

M_{ij}：第 k 行と l 列を省いた $(n-1) \times (n-1)$ 小行列の行列式

3. 行列式（つづき）

- $A(n \times n)$、$B(n \times n)$ のとき、$|AB| = |A||B|$
- $A(n \times n)$ のとき、$|aA| = a^n|A|$
- $\lambda_i \ (i = 1, \ldots, n)$ は A の固有値とし、$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \ \rightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \neq 0 \ (\forall i)$

4. 逆行列

$$\boxed{A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{|A|}} \longleftarrow \text{adj(A)：} A \text{ の余因子行列}$$

$$\mathrm{adj}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} M_{ji}$$

- $A(n \times n)$、$B(n \times n)$ のとき、$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(aA)^{-1} = \dfrac{A^{-1}}{a}$
- $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

行列の復習

4. 逆行列（例題）

次の行列の逆行列を求めよ。 $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

答: $A^{-1} = \dfrac{\mathrm{adj}(A)}{|A|}$

$$|A| = (-3)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

4. 逆行列（例題）つづき

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\times\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\times\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\times\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\times\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 8 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ -5 & 15 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{|A|} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ -5 & 15 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{AA^{-1} = I}$$

必ず確認すること

５．固有値、固有ベクトルと対角化

行列 A の特性方程式（characteristic equation）

$$
\begin{aligned}
|sI - A| &= s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_2 s + a_1 = 0 \\
s &= \lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ \leftarrow\ A \text{ の固有値（eigenvalue）}
\end{aligned}
$$

$$
A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \quad (\lambda_i I - A)\vec{v}_i = 0 \qquad \vec{v}_i \text{ は固有ベクトル}
$$

$$
T = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}
$$

$$
T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Leftarrow \textbf{モード行列}
$$

5. 固有値、固有ベクトルと対角化（つづき）

次の行列Aの固有値と
固有ベクトルを求めよ。

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

答：

$$|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda+3 & -2 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & -5 & \lambda+4 \end{bmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+4)$$

より固有値：$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -4$

$((-1)I - A) = 0$より、-1の固有ベクトル$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T$

$((-2)I - A) = 0$より、-2の固有ベクトル$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T$

$((-4)I - A) = 0$より、-4の固有ベクトル$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

対角化は固有ベクトルを並べた固有ベクトル行列を求めて行う。
固有ベクトル行列$\boldsymbol{T}$とその逆行列$\boldsymbol{T}^{-1}$は次のスライドへ。
$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$を計算すれば、対角行列となる。

5. 固有値、固有ベクトルと対角化(つづき)

答：

固有値λ=-4の

固有ベクトルの計算

固有ベクトルは

$\vec{v}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$でも

$\vec{v}_3 = [0 \quad 0 \quad 6]$でも

どちらでも良い。

$\vec{v}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]$とする。

(モード行列の

逆行列が計算し易い

ため。

$\boldsymbol{x}_3 = [0 \quad 0 \quad 0]$ は不可。

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

連立1次方程式

階段行列にして求める

$\lambda = 4 \to$ 固有ベクトル

$$(\lambda I - A)\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -4+3 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -4+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{3_1} \\ v_{3_2} \\ v_{3_3} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{3_1} \\ v_{3_2} \\ v_{3_3} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -v_{3_1} - 2v_{3_2} = 0 \\ v_{3_1} - 4v_{3_2} = 0 \\ -5v_{3_2} = 0 \end{cases}$$

$v_{3_1} = 0,\ v_{3_2} = 0,\ v_{3_3}$: 何でもよい

行列の対角化: 求めた、行列Aの固有値と固有ベクトルを使って、行列$\boldsymbol{T}$を求め、行列Aを対角化する。

$$T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}; \quad T^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

となるはずであるが、計算して確かめよ。

5. 固有値、固有ベクトルと対角化（つづき）

行列の対角化：行列Aの固有ベクトル$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$

行列$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$

↑固有ベクトル　対角行列になる$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$

を並べた

対角化：何に使うか

(1) 状態方程式の解を求めるとき

(2) 制御系をモードに分解する

6. 2次形式と正定関数、正定行列

2次形式

$$V(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$$

$$V(\vec{x}) = V(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_2x_3 + 2fx_1x_3$$

2次形式のAは
正方行列
かつ
対称行列

例題：
次の2次形式を2次形式に書き下せ

$$V(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

例題：

次の2次形式を2次形式に書き下せ

$$V(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

答：

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 + 0x_3 \\ -4x_1 + 10x_2 + 6x_3 \\ 0x_1 + 6x_2 + 18x_3 \end{bmatrix} \\ &= (2x_1^2 - 4x_1x_2) + (-4x_1x_2 + 10x_2^2 + 6x_2x_3) + (6x_2x_3 + 18x_3^2) \\ &= 2x_1^2 + 10x_2^2 + 18x_3^2 - 8x_1x_2 + 12x_2x_3 \end{aligned}$$

6. 2次形式と正定関数、正定行列(つづき)

2次形式 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ ：正定値⇔すべての$\boldsymbol{x}\neq 0$について、$V(\boldsymbol{x})>0$

A：正定行列⇔$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$が正定値

$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$：転置

判定方法(1) 主小行列式>0

判定方法(2) 正定値の条件： Aの全ての固有値>0

2次形式 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ ：準正定値⇔すべての$\boldsymbol{x}\neq 0$について、$V(\boldsymbol{x})\geqq 0$

A：準正定値行列⇔$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{x}$が準正定値（準正定関数）

判定方法(1) 全ての小行列式≧0

判定方法(2) 準正定値の条件： Aの全ての固有値≧ 0

例題：

次の行列Aの固有値を求めよ。　$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix}$

この行列は正定行列か？

先頭主座小行列式を計算する

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 18 \end{bmatrix}$$ 主小行列式

$$2 > 0,\quad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 4 > 0,\quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 6 \\ 0 & 6 & 18 \end{vmatrix} = 0$$

→準正定

固有値を計算する。

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 & 0 \\ 4 & \lambda - 10 & -6 \\ 0 & -6 & \lambda - 18 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)\begin{vmatrix} \lambda - 10 & -6 \\ -6 & \lambda - 18 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 0 & \lambda - 18 \end{vmatrix}$$

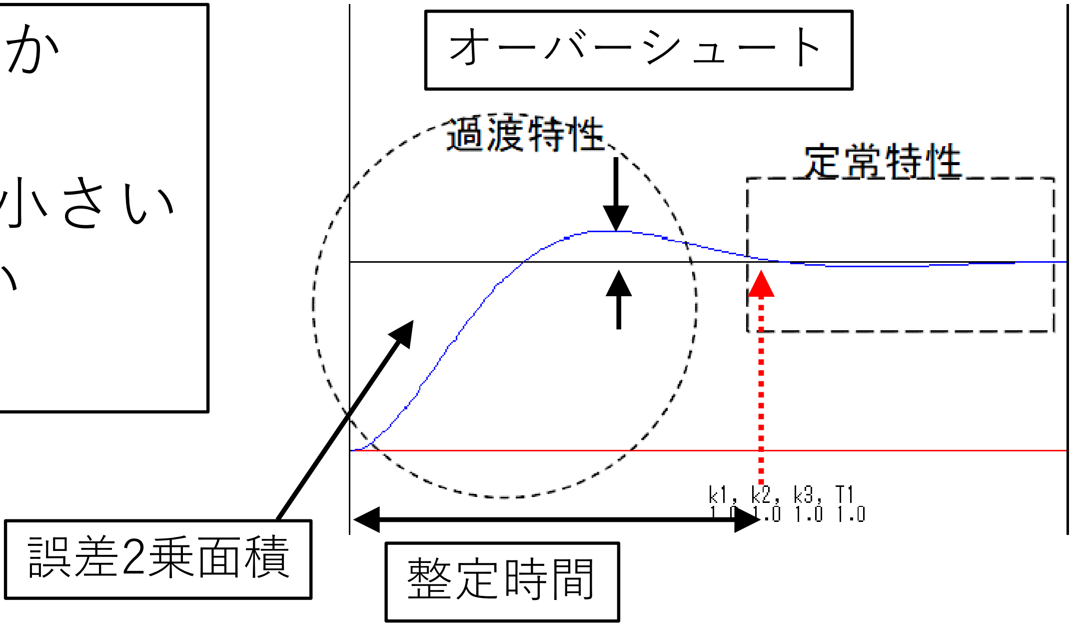
$$= \lambda^3 - 30\lambda^2 + 184\lambda$$

根=固有値=0, 8.5969, 21.4031→ 0の固有値と、正の固有値

→準正定値（準正定行列）

2次形式は何に使うか(1)

どんな過渡応答が良いか
1.整定時間：短い
2.オーバーシュート：小さい
3.誤差2乗面積：小さい
→最適レギュレータ



誤差2乗面積を表すのに使う
教科書 p 157

$$J = \int_0^\infty \left[\boxed{\vec{x}(t)^T Q \vec{x}(t) + \vec{u}(t)^T R \vec{u}(t)} \right] dt$$

2次形式は何に使うか(2)

リアプノフの安定定理

$$\frac{dX}{dt} = f(X,t)$$ に対し，次の5つの条件を満たし

連続な一階偏導関数をもつ連続な実数値スカラ関数V(X)が存在すれば，平衡点は大域的安定である。

$V(0)=0$

$V(X)$は正定値 ← $\boxed{V(x)=x^T P x}$

$\|X\| \to \infty$のとき　$V(X) \to \infty$

$\dot{V}(X)$ は準負定値

$\dot{V}(X)$ は恒等的に0ではない

まとめ

行列論の復習:

1. 行列、ベクトルの定義
2. 行列の和算、乗算
3. 行列式
4. 逆行列
5. 固有値、固有ベクトルと対角化
6. 2次形式と正定関数、正定行列