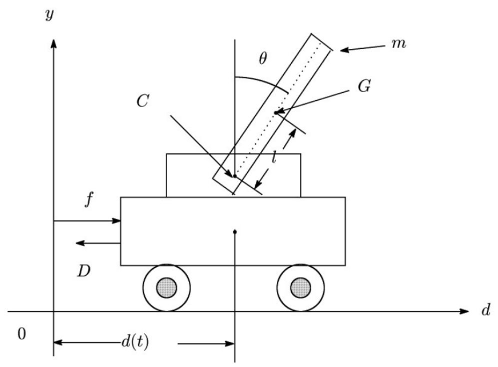
倒立振子の数学モデル

動的システムと状態方程式（追加資料）

倒立振子システム

$m[kg]$: 振子の質量
$c[kg.m^2/s]$: 振子の回転軸の摩擦係数
$\theta[rad]$: 振子の角度
$J[kg.m^2]$: 振子の慣性モーメント
G: 振子の重心
$m_c[kg]$: 台車の質量
$D[kg/s]$: 台車の摩擦係数
$d[m]$: 台車の変位
$l[m]$: 振子の重心からの長さ



台車と振子の運動方程式はラグランジュ法により

$$\vec{f} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} + \frac{\partial P}{\partial \dot{\vec{q}}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{q}}$$

2

倒立振子システムの数学モデル

$$\vec{f} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} + \frac{\partial P}{\partial \dot{\vec{q}}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{q}}$$

T:	運動エネルギー	$\vec{q}^T$:	$[d, \theta]$
P:	散逸エネルギー	$\dot{\vec{q}}^T$:	$[\dot{d}, \dot{\theta}]$
U:	位置エネルギー	$\vec{f}^T$:	$[f_d, 0]$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_c\dot{d}^2(t) + \frac{1}{2}m\{[\dot{d}(t) + l\cos\theta(t)\dot{\theta}(t)]^2 + [-l\sin\theta(t)\dot{\theta}(t)]^2\} + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2(t) \\ P &= \frac{1}{2}D\dot{d}^2(t) + \frac{1}{2}c\dot{\theta}(t) \\ U &= mgl\cos\theta(t) \end{aligned}$$

振子の重心 G 位置　$G\{x + l\sin\theta, l\cos\theta\}$

3

倒立振子システムの数学モデル

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{d}(t)}\right) &= (m_c + m)\ddot{d}(t) + ml\cos\theta(t)\ddot{\theta}(t) - ml\sin\theta(t)\dot{\theta}^2(t) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}(t)}\right) &= ml\ddot{d}(t)\cos\theta(t) - ml\dot{d}(t)\sin\theta(t)\dot{\theta}(t) + ml^2\ddot{\theta}(t) + J\ddot{\theta}(t) \\ \frac{\partial T}{\partial d(t)} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta(t)} &= -ml\dot{d}(t)\sin\theta(t)\dot{\theta}(t) \\ \frac{\partial U(t)}{\partial D(t)} &= 0 \\ \frac{\partial U(t)}{\partial \theta(t)} &= -mgl\sin\theta(t) \\ \frac{\partial P}{\partial \dot{d}(t)} &= D\dot{(}t) \\ \frac{\partial P}{\partial \dot{\theta}(t)} &= c\dot{\theta}(t) \end{aligned}$$

各項をLagrange方程式に代入

$$\vec{f} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} + \frac{\partial P}{\partial \dot{\vec{q}}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{q}}$$

4

倒立振子システムの数学モデル

$$ml\cos\theta(t)\ddot{d} + ml^2\ddot{\theta}(t) + J\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) - mgl\sin\theta(t) = 0$$

$$ml\ddot{d}(t)\cos\theta(t) + (ml^2 + J)\ddot{\theta}(t) = mgl\sin\theta(t) - c\dot{\theta}(t)$$

より、 $\begin{bmatrix} mc+m & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & ml^2+J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{d}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ml\sin\theta(t)\dot{\theta}^2(t) - D\dot{d}(t) + f(t) \\ mgl\sin\theta(t) - c\dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$

振子の慣性モーメント $J = \frac{1}{3}ml^2$

代入＋線形化＋まとめ

線形化： $\theta \ll 1(rad) \rightarrow \sin\theta(t) = \theta(t), \cos\theta(t) = 1, \dot{\theta}^2(t) = 0$

次のスライド

倒立振子システムの数学モデル

$$\begin{bmatrix} \ddot{d}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4D}{4m_c+m}\dot{d}(t) - \frac{3mg}{4m_c+m}\theta(t) + \frac{4}{4m_c+m}f(t) + \frac{3c}{l(4m_c+m)}\dot{\theta}(t) \\ \frac{3D}{l(4m_c+m)}\dot{d}(t) + \frac{3(m_c+m)g}{l(4m_c+m)}\theta(t) - \frac{3}{l(4m_c+m)}f(t) - \frac{3(m_c+m)c\theta(t)}{ml^2(4m_c+m)} \end{bmatrix}$$

ベアリングによって回転 ⟹ 摩擦係数 c を無視できる。

⇓

$$\boxed{\begin{bmatrix} \ddot{d}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4D}{4m_c+m}\dot{d}(t) - \frac{3mg}{4m_c+m}\theta(t) + \frac{4}{4m_c+m}f(t) \\ \frac{3D}{l(4m_c+m)}\dot{d}(t) + \frac{3(m_c+m)g}{l(4m_c+m)}\theta(t) - \frac{3}{l(4m_c+m)}f(t) \end{bmatrix}}$$

倒立振子システムの数学モデル

$$\begin{bmatrix} \ddot{d}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{4D}{4m_c+m}\dot{d}(t) - \dfrac{3mg}{4m_c+m}\theta(t) + \dfrac{4}{4m_c+m}f(t) \\ \dfrac{3D}{l(4m_c+m)}\dot{d}(t) + \dfrac{3(m_c+m)g}{l(4m_c+m)}\theta(t) - \dfrac{3}{l(4m_c+m)}f(t) \end{bmatrix}$$

状態変数 $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t) \\ \theta(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -\frac{4D}{M}x_3(t) - \frac{3mg}{l}x_2(t) + \frac{4}{m}f(t) \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{3D}{Ml}x_3(t) + \frac{3(m_c+m)g}{Ml}x_2(t) - \frac{3}{Ml}f(t) \end{aligned}$$

倒立振子システムの状態方程式

状態方程式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{3mg}{M} & -\dfrac{4D}{M} & 0 \\ 0 & \dfrac{3(m_c+m)g}{Ml} & \dfrac{3D}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{4}{M} \\ -\dfrac{3}{Ml} \end{bmatrix} f(t)$$

各パラメータを代入：次のスライド

倒立振子システムの状態方程式

表 1: 倒立振子系のパラメータ

Parameter	**Value**
m	0.1[kg]
m_c	1[kg]
l	1[m]
g	9.81[m/s^2]
D	0.3[kg/s]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7.178 & -0.293 & 0 \\ 0 & 7.896 & 0.22 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.976 \\ -0.732 \end{bmatrix} f(t)$$

9