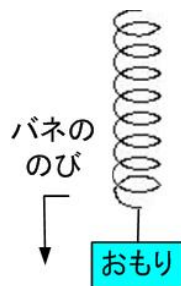


# システムの安定性判別法

- BIBO安定性について
- 安定性と伝達関数の関係
- 安定性判別（ラウス・フルビッツ安定性判別法）
- Lyapunov方程式と安定判別
- 出力の2乗積分

## 線形性の例

おもりの重さと  
ばねののび



ばねののび

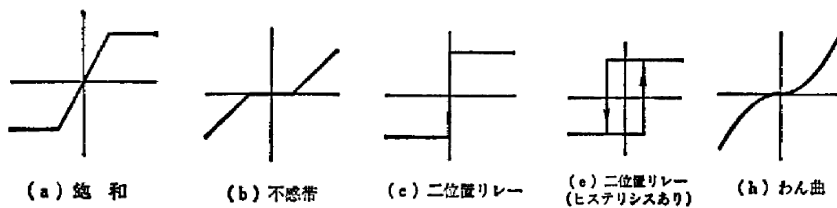
傾き=ばね定数

おもりの重さ

**線形**: 反応(ばねの延び)→加えた力に比例

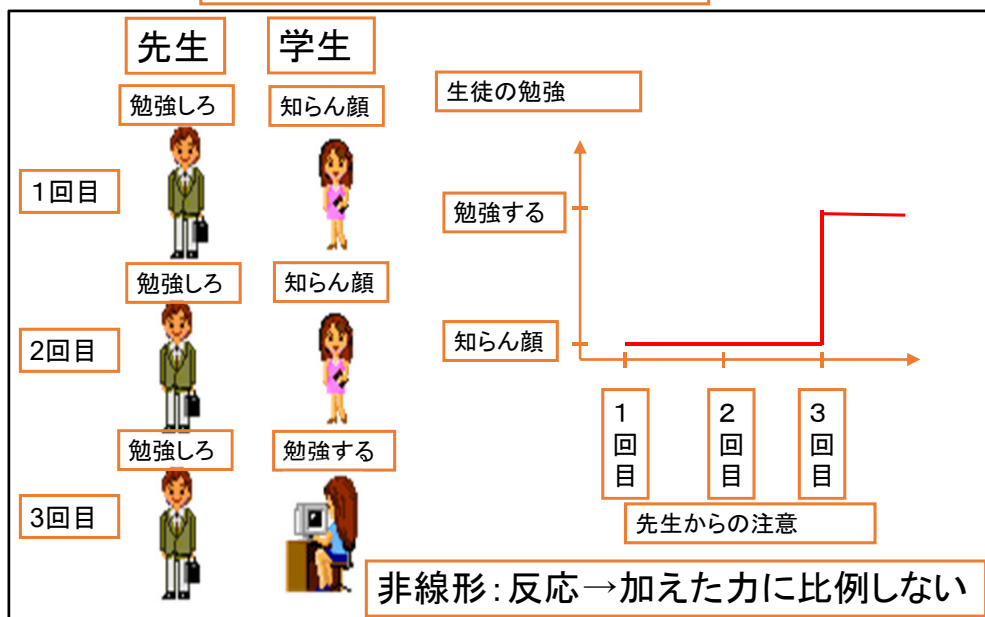
## 非線形特性の例

1. 飽和: アンプなど出力に制限
2. 不感帯: クーロン摩擦、ちいさい誤差や観測雑音に影響されないようにするために用いられる
3. 二位置リレー: 積極的に利用する、例: 電動機のインバータ制御、ロボットモーターのPWM制御、スライディングモード制御
4. ヒステリシス: 板ばね、圧電素子→制御が困難
5. バックラッシュ: 歯車
6. わん曲: ばねの弾性限界外、抵抗を流れる電流



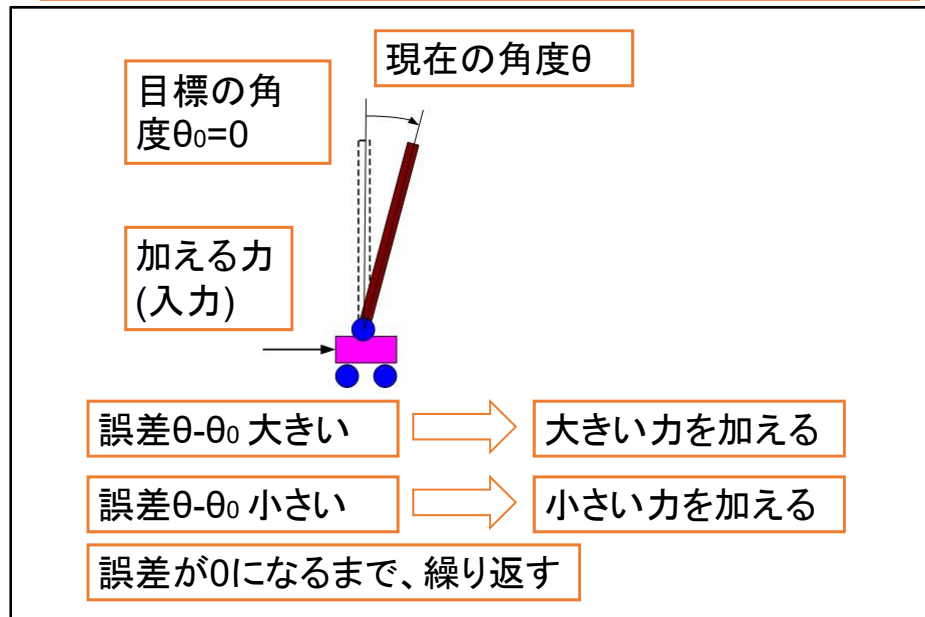
3

## 線形でない - 非線形の例



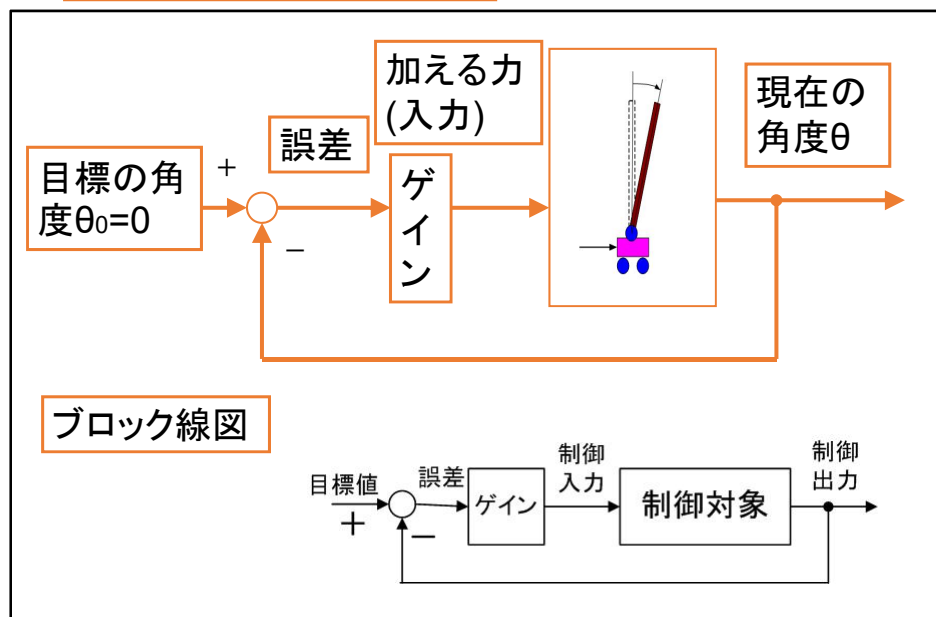
4

どのようにして不安定系を安定系にするか



5

フィードバック制御



6

## フィードバック制御が成功する条件

誤差 $\theta - \theta_0$  大きい  $\Rightarrow$  大きい力を加える

誤差 $\theta - \theta_0$  小さい  $\Rightarrow$  小さい力を加える

誤差が0になるまで、繰り返す

大きい力を加える  $\Rightarrow$  力の効果が大きい

小さい力を加える  $\Rightarrow$  力の効果が小さい

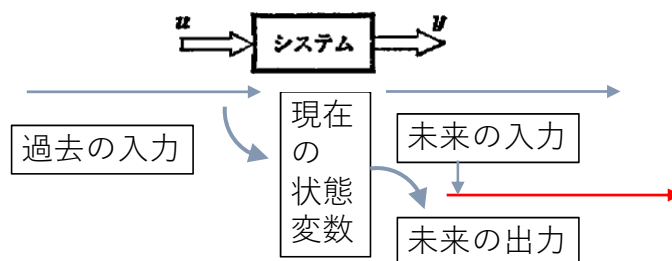
効果が力に比例する = 線形性

線形が制御のもとになっている  
非線形だと、制御が難しい

7

## 状態変数とは：非線形系の時

過去の入力をまとめて表す。  
未来の出力が、現在の状態変数と、未来の入力で決まる。



線形系の状態方程式

$$\text{状態方程式 } \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{出力方程式 } y(t) = Cx(t)$$

非線形系に拡張  $\rightarrow$  非線形系の状態方程式

$$\text{状態方程式 } \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \quad \text{出力方程式 } y(t) = h(x(t), u(t))$$

8

## 非線形の例：倒立振り子

$$(m_c + m)\ddot{d}(t) + ml \cos \theta(t)\ddot{\theta}(t) - ml \sin \theta(t)\dot{\theta}^2(t) + D\dot{d}(t) = f(t)$$

$$ml \cos \theta(t)\ddot{d} + ml^2\ddot{\theta}(t) + J\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) - mgl \sin \theta(t) = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_c + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & ml^2 + J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ml \sin \theta(t)\dot{\theta}^2(t) - D\dot{d}(t) + f(t) \\ mgl \sin \theta(t) - c\dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

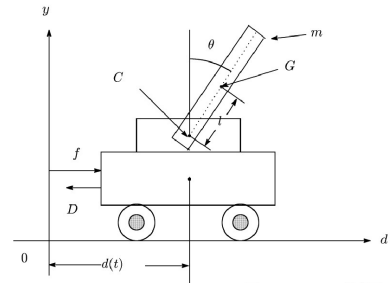
$$\begin{bmatrix} \ddot{d}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{(m_c + m)(ml^2 + J) - m^2l^2 \cos^2 \theta(t)} \begin{bmatrix} ml^2 + J & -ml \cos \theta(t) \\ -ml \cos \theta(t) & m_c + m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ml \sin \theta(t)\dot{\theta}^2(t) - D\dot{d}(t) + f(t) \\ mgl \sin \theta(t) - c\dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

状態変数 入力：台車加速度

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t) \\ \theta(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} u = \ddot{r} \\ \text{状態方程式} \\ \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \end{array}$$

sin、cos、変数の積、2乗を含む  
→非線形

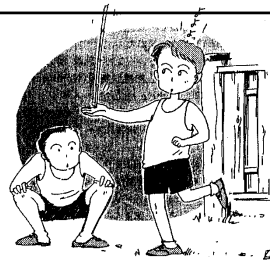
$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \text{ の形をしていない}$$



## 平衡点の不安定、漸近安定

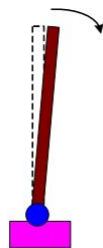
**平衡点**: 状態方程式の  $u(t)=0$  のとき

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{x=x_0} = f(x_0, 0) = 0 \text{ となる } x_0$$



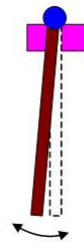
不安定な  
平衡点

ほっておくと  
元の状態から大きく動く

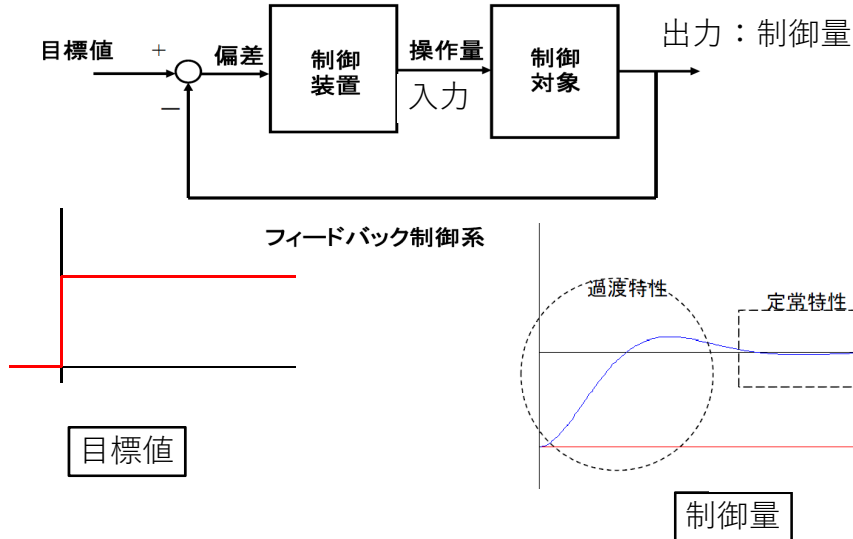


漸近安定  
な平衡点

ほっておい  
ても元の状  
態へ戻る



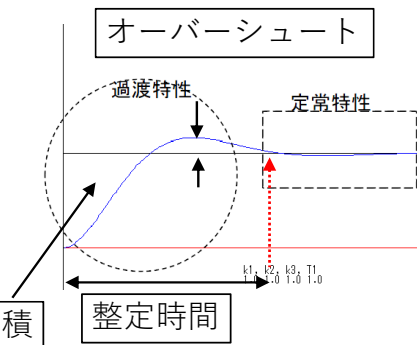
## 過渡応答と定常応答



11

## 過渡応答

どんな過渡応答が良いか  
 1. 整定時間：短い  
 2. オーバーシュート：小さい  
 3. 誤差2乗面積：小さい  
 →最適レギュレータ



### 過渡応答の種類

1. インパルス応答：目標入力 インパルス  $r(t) = \delta(t), R(s) = 1$
2. ステップ応答=インディシャル応答：目標入力 ステップ  $r(t) = 1, R(s) = 1/s$
3. ランプ応答：目標入力 直線=ランプ入力  $r(t) = t, R(s) = 1/s^2$

12

## 平衡点の安定性の定義

安定 ⇔ 平衡点近くの初期値で出発し、状態変数  $x$  有限

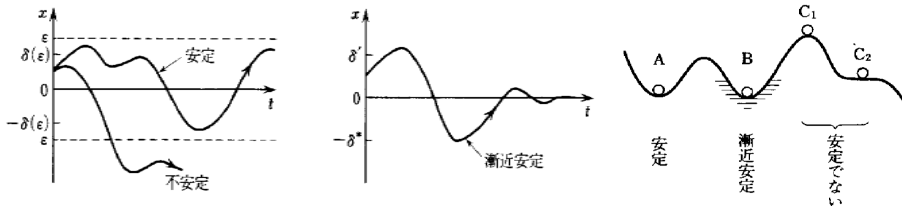
漸近安定 ⇔ 平衡点近くの初期値で出発し、

$t \rightarrow \infty$  のとき状態変数  $x \rightarrow 0$

制御工学Aの講義の「安定」=この講義の「漸近安定」

大域漸近安定 ⇔ 全ての初期値で出発し、

$t \rightarrow \infty$  のとき状態変数  $x \rightarrow 0$



13

## 線形系の安定性

線形系の状態方程式

$$\text{状態方程式} \quad \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

安定 ⇔ 行列  $A$  の全ての固有値の実数部  $\leq 0$

漸近安定 ⇔ 行列  $A$  の **全ての** 固有値の実数部  $< 0$

不安定 ⇔ 行列  $A$  の固有値が **1つでも** 実数部  $> 0$

線形系の  $u(t)=0$  のとき  $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$  解  $x(t) = e^{At} x_0$

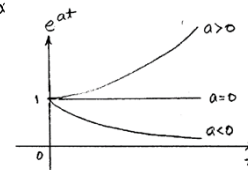
遷移行列  $e^{At}$  = 行列  $A$  の固有値  $\lambda_i$  の指数関数  $e^{\lambda_i t}$  の組み合わせ

指数関数 指数部の正負で  $\rightarrow 0$ 、または、 $\rightarrow \infty$

固有値が複素数のとき  $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$

実数部  $\alpha_i$ 、虚数部  $\beta_i$  に分けて

$$e^{\lambda_i t} = e^{\alpha_i t} (\cos \beta_i t + i \sin \beta_i t)$$



14

## 安定性と伝達関数の関係

伝達関数：

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_2 s + a_1} \\ &= \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \\ &= \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - p_n} \end{aligned}$$

インパルス応答：

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_1}{s - p_1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_2}{s - p_2}\right\} + \cdots + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_n}{s - p_n}\right\}$$

**安定であることは、各時間関数が、 $t \rightarrow \infty$ のときに0になることである。**

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_i}{s - p_i}\right\} = A_i e^{p_i t}$$

15

$p_i$ が実数の場合：

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_i}{s - p_i}\right\} = A_i e^{p_i t}$$

$$p_i > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} A_i e^{p_i t} = \infty$$

$$p_i = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} A_i e^{p_i t} = A_i$$

$$p_i < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} A_i e^{p_i t} = 0 \Leftarrow \text{安定}$$

16



$p_i$ が虚数の場合：

$p_i = a + jb$  の場合、 $p_{i+1} = a - jb$  が共役となる。そのときに、 $A_i$  と  $A_{i+1}$  も複素共役となる。

$$A_i = \alpha + j\beta, A_{i+1} = \alpha - j\beta$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A_i}{s - p_i} \right\} = A_i e^{p_i t}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A_i}{s - p_i} + \frac{A_{i+1}}{s - p_{i+1}} \right\} &= A_i e^{p_i t} + A_{i+1} e^{p_{i+1} t} \\ &= (\alpha + j\beta) e^{(a+jb)t} + (\alpha - j\beta) e^{(a-jb)t} \\ &= e^{at} ((\alpha + j\beta) e^{jbt} + (\alpha - j\beta) e^{-jbt}) \\ &= e^{at} ((\alpha + j\beta)(\cos bt + j \sin bt) + (\alpha - j\beta)(\cos bt - j \sin bt)) \\ &= 2e^{at} (\alpha \cos(bt) - \beta \sin(bt)) \end{aligned}$$

$$a < 0 \text{ すなわち } \operatorname{Re}(p_i) < 0 \Rightarrow \text{安定}$$

17

伝達関数：

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \cdots + a_2 s + a_1} \\ &= \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \\ &= \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - p_n} \end{aligned}$$

$$G(s) \text{ の全ての極の } \operatorname{Re}(p_i) < 0 \Rightarrow \text{安定}$$

18

## システムの安定性

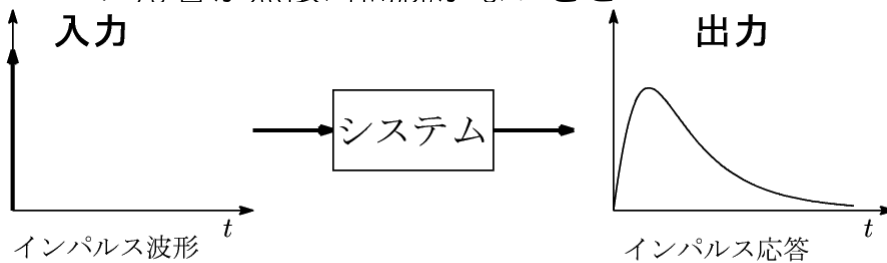
良いシステム = (少なくとも) 安定である

システムが安定である：有限入力=>有限出力 (**BIBO**) 安定  
(**BIBO** : Bounded Input Bounded Output)

19

## BIBO安定であるための必要十分条件

- BIBO安定：有限入力→有限出力
- インパルス応答が無限時間続かないこと



$$t \rightarrow \infty \text{ のとき、} y(t) \rightarrow 0$$

20

## 安定性判別

- 特性方程式（伝達関数の分母）：**ラウス・フルビッツ安定性判別法**
- フィードバック系の限定方法：**ボード線図、ナイキスト法**  
（安定度も見られる）

21

## ラウス・フルビッツ安定性判別法 (Routh-Hurwitz stability criterion)

特性方程式：

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

- 安定であるための必要条件：特性方程式の全ての係数は正である。
- 安定であるための必要十分条件：ラウス表（Routh table）の最左列の全ての要素が正である。

22

# ラウス・フルビッツ安定性判別法

特性方程式：

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\cdots$
$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\cdots$
$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\cdots$
$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$$b_i = -\frac{a_n \times a_{n-(2i+1)} - a_{n-2i} \times a_{n-1}}{a_{n-1}}$$

$$c_i = -\frac{a_{n-1} \times b_{i+1} - a_{n-(2i+1)} \times b_1}{b_1}$$

23

特性方程式：

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\cdots$
$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\cdots$
$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\cdots$
$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$$b_i = -\frac{a_n \times a_{n-(2i+1)} - a_{n-2i} \times a_{n-1}}{a_{n-1}}$$

$$c_i = -\frac{a_{n-1} \times b_{i+1} - a_{n-(2i+1)} \times b_1}{b_1}$$

$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	$\cdots$
$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	$\cdots$
$b_1 = \left( \begin{array}{c cc} - & a_n & a_{n-2} \\ \hline & a_{n-1} & a_{n-3} \\ \hline & a_{n-1} & \end{array} \right)$	$b_2 = \left( \begin{array}{c cc} - & a_n & a_{n-4} \\ \hline & a_{n-1} & a_{n-5} \\ \hline & a_{n-1} & \end{array} \right)$	$b_3 = \left( \begin{array}{c cc} - & a_n & a_{n-6} \\ \hline & a_{n-1} & a_{n-7} \\ \hline & a_{n-1} & \end{array} \right)$	$b_4$	$\cdots$
$c_1 = \left( \begin{array}{c cc} - & a_{n-1} & a_{n-3} \\ \hline & b_1 & b_2 \\ \hline & b_1 & \end{array} \right)$	$c_2 = \left( \begin{array}{c cc} - & a_{n-1} & a_{n-5} \\ \hline & b_1 & b_3 \\ \hline & b_1 & \end{array} \right)$	$c_3 = \left( \begin{array}{c cc} - & a_{n-1} & a_{n-7} \\ \hline & b_1 & b_4 \\ \hline & b_1 & \end{array} \right)$	$\cdots$	$\cdots$
$d_1$	$d_2$	$d_3$	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

24

## 安定性判別

- ラウス表の最左列の要素

$$a_n, a_{n-1}, b_1, c_1, d_1 \dots$$

の符号変化の数 = 実部が正の特性根の数

- ラウス表の1列目の符号変化はなければ、**安定**

25

例：  $s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4 = 0$

1	10	4
5	10	-
8	4	
7.5		
4		

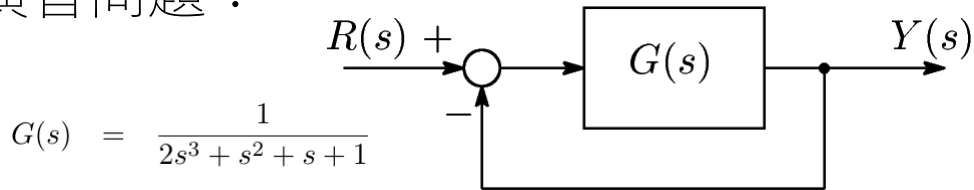
$$8 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}}{5} \quad 4 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}}{5}$$

$$7.5 = -\frac{\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{8} \quad 4 = -\frac{\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 7.5 & 0 \end{vmatrix}}{7.5}$$

$$[(s + 1)(s + 2)(s + 1 + j)(s + 1 - j) = 0]$$

26

## 演習問題：



$$G(s) = \frac{1}{2s^3 + s^2 + s + 1}$$

$$P(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad \leftarrow \text{閉ループ伝達関数}$$

$$\begin{aligned} 1 + G(s) &= 1 + \frac{1}{2s^3 + s^2 + s + 1} \\ &= 2s^3 + s^2 + s + 2 = 0 \quad \leftarrow \text{特性方程式} \end{aligned}$$

ラウス表：

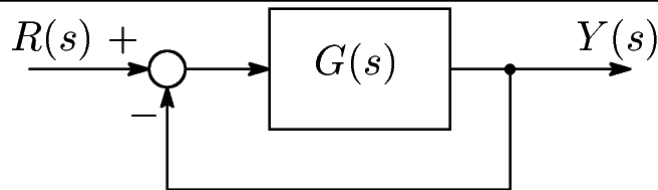
2	1
1	2
-3	-
2	

2つの正の極→不安定

$$\left( 2(s+1)\left(s - \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\left(s - \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = 0 \right)$$

27

## 宿題：



$$G(s) = \frac{1}{s^5 + 8s^4 + 25s^3 + 40s^2 + 34s + 11}$$

$$P(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$\begin{aligned} 1 + G(s) &= 1 + \frac{1}{s^5 + 8s^4 + 25s^3 + 40s^2 + 34s + 11} \\ &= s^5 + 8s^4 + 25s^3 + 40s^2 + 34s + 12 = 0 \end{aligned}$$

1	25	34
8	40	12
$b_1$	$b_2$	
$c_1$	$c_2$	
$d_1$	$d_2$	
$e_1$		

28

## リャプノフ方程式

$$PA + A^T P = -Q \Leftrightarrow \text{Lyapunov 方程式}$$

$P(n \times n)$ : 未知行列  
ここで、

1.  $A$  の固有値  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\lambda_i + \lambda_j \neq 0 \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n)$$

2.  $Q$  は対称行列とする。

29

## 線形系安定性の必要十分条件

**定理:**  $Q > 0$  または  $Q \geq 0$  で、かつ

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ Q^{1/2} A \\ \vdots \\ Q^{1/2} A^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

となる  $Q$  を決定する。このとき、 $A$  が安定行列であるための必要十分条件は、 $PA + A^T P = -Q$  の解が  $P > 0$  である。

30

## 線形系安定性の必要十分条件（つづき）

$Q = C^T C$  を与えると

可観測性（章4-1）

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

となる。

31

例題：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Q = I \text{ とする。}$$

以降は $Q$ を対称行列のみとする。

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \leftarrow \text{未知}$$

リヤプノフ方程式  $PA + A^T P = -Q$  に代入

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_{11}, p_{12}, p_{22} \text{ をもとめ、} p_{11} = \frac{5}{4}, p_{12} = \frac{1}{4}, p_{22} = \frac{3}{8}$$

32



$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

シルベスターの判別条件より、 $p_{11} = 5/4 > 0$ 、 $|P| = 13/4 > 0$ 。

よって、 $P > 0 \Rightarrow A$  は安定な行列である。

( $A$  の固有値は、 $\lambda_1 = -1 + j$ ,  $\lambda_2 = -1 - j$  である。)

33

## 評価関数

$$J_1 = \int_0^{\infty} |e| dt \quad \text{誤差面積}$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} e^2 dt \quad \text{二乗誤差面積} \quad \leftarrow \text{もっともよく使われる}$$

$$J_3 = \int_0^{\infty} t|e| dt$$

$$J_4 = \int_0^{\infty} te^2 dt$$

$$J_5 = \int_0^{\infty} t^2 e^2 dt$$

他は使わない

評価関数の条件：最小値が存在すること

34

## 出力の2重面積の計算

漸近安定な線形系  $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)$ 、出力  $\vec{y}(t) = C\vec{x}(t)$  について

2乗積分誤差  
(誤差2乗面積)  $J = \int_0^{\infty} \vec{x}(t)^T Q \vec{x}(t) dt$ ,  $Q \geq 0$  は重み行列

$Q = \text{diag} [ q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n ]$  をおくと、



$$J = \int_0^{\infty} [q_1 x_1^2(t) + q_2 x_2^2(t) + \cdots + q_n x_n^2(t)] dt$$

35

## 出力の2重面積の計算

漸近安定な線形系  $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)$ 、出力  $\vec{y}(t) = C\vec{x}(t)$  について

誤差2乗面積  $J = \int_0^{\infty} \vec{y}(t)^T \vec{y}(t) dt = \int_0^{\infty} (y_1^2(t) + y_2^2(t) + \cdots + y_m^2(t)) dt$

$$\begin{aligned} (y_1^2(t) + y_2^2(t) + \cdots + y_m^2(t)) &= [ y_1(t) \quad y_2(t) \quad \cdots \quad y_m(t) ] \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \\ &= \vec{y}^T(t) \vec{y}(t) = (C\vec{x}(t))^T (C\vec{x}(t)) = \vec{x}^T(t) C^T C \vec{x}(t) \end{aligned}$$

$$J = \int_0^{\infty} \vec{y}(t)^T \vec{y}(t) dt = \int_0^{\infty} \vec{x}(t)^T C^T C \vec{x}(t) dt$$

36

## 出力の2重面積の計算

漸近安定な線形系  $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t)$ 、出力  $\vec{y}(t) = C\vec{x}(t)$  について  
 誤差2乗面積を計算する  $J = \int_0^{\infty} \vec{y}(t)^T \vec{y}(t) dt = \int_0^{\infty} \vec{x}(t)^T C^T C \vec{x}(t) dt$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \vec{x}^T Q \vec{x} dt \\ &= - \int_0^{\infty} [\vec{x}^T (A^T P + P A) \vec{x}] dt = - \int_0^{\infty} [\dot{\vec{x}}^T P \vec{x} + \vec{x}^T P \dot{\vec{x}}] dt \\ &= - \int_0^{\infty} \left[ \frac{d}{dt} (\vec{x}^T P \vec{x}) \right] dt = - \vec{x}^T P \vec{x} \Big|_0^{\infty} \\ &= - \vec{x}(\infty)^T P \vec{x}(\infty) + \vec{x}(0)^T P \vec{x}(0) \end{aligned}$$

漸近安定なシステムなので、 $\vec{x}(\infty) = \vec{0}$  となり、 $J = \vec{x}(0)^T P \vec{x}(0)$  で計算される。

37

## 演習問題:

図1の系に単位ステップ入力が入るとき二乗誤差面積を求めよ。また、これが最小となるように  $\zeta$  を求めよ。

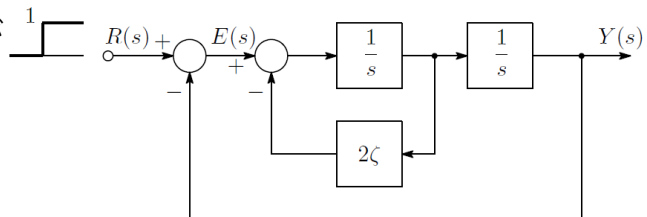


Figure 1: 2次系

1. 状態方程式を求める。
2.  $P$  を計算する。
3.  $J$  を求める。
4.  $J$  最小の  $\zeta$  を求める。

$$J = \int_0^{\infty} e^2 dt \text{ 二乗誤差面積を計算する。}$$

38

## 演習問題：

1. 状態方程式を求める。

(a)  $R(s)$  から  $E(s)$  までの伝達関数を求める。

$$E(s) = \frac{s^2 + 2\zeta s}{s^2 + 2\zeta s + 1} R(s)$$

(b) 微分方程式を求める。

$$\ddot{e}(t) + 2\zeta\dot{e}(t) + e(t) = \ddot{r}(t) + 2\zeta\dot{r}(t)$$

$$\ddot{e}(t) + 2\zeta\dot{e}(t) + e(t) = 0 \quad \leftarrow \text{なぜ}$$

(c) 状態方程式

39

## 演習問題：

(c) 状態方程式

状態変数： $e = x_1, \dot{e} = \dot{x}_1 = x_2$  とおくと（状態方程式の誤差部）

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$e = x_1 = C\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{よって、} J = \int_0^\infty e^2 dt = \int_0^\infty \vec{x}^T C^T C \vec{x} dt, \quad C^T C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

40

## 演習問題：

2.  $P$  を計算する。(リャプノフ方程式)

$$PA + A^T P = -Q$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

これを解いて、

$$P = \begin{bmatrix} \zeta + \frac{1}{4\zeta} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\zeta} \end{bmatrix}$$

41

## 演習問題：

3. 誤差 2 乗面積  $J$

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta + \frac{1}{4\zeta} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\ &= \left( \zeta + \frac{1}{4\zeta} \right) x_1^2(0) + x_1(0)x_2(0) + \frac{1}{4\zeta} x_2^2(0) \end{aligned}$$

ステップ入力より、 $x_1(0) = e(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 0$  を  $J$  に代入して、

$$J = \zeta + \frac{1}{4\zeta}$$

42

## 演習問題：

4. 誤差最小値を求める。

$$\frac{dJ}{d\zeta} = 1 - \frac{1}{4\zeta^2} = \frac{4\zeta^2 - 1}{4\zeta^2} = 0$$

より、 $4\zeta^2 - 1 = 0$  から  $\zeta = 0.5$  のとき、

誤差が最小

