2024システム制御工学特論

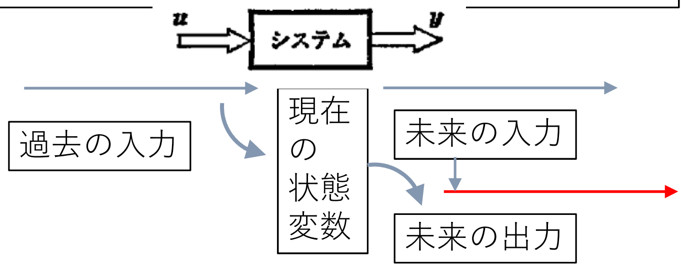
2024年5月14日

講義予定

- 状態方程式の復習
- 推移行列求め方の復習
- 可制御性、可観測性

復習：状態変数とは

過去の入力をまとめて表す。
未来の出力が、現在の状態変数と、未来の入力で決まる。



状態方程式の一般形

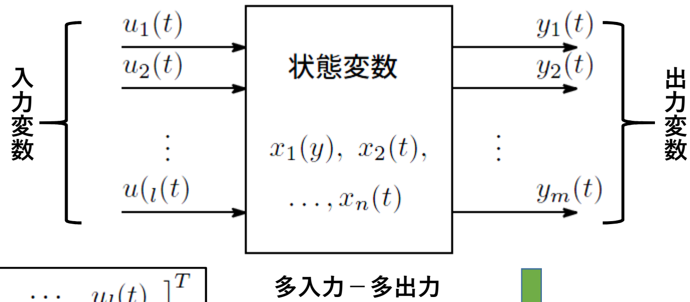
状態方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t)$

出力方程式 $\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t)$

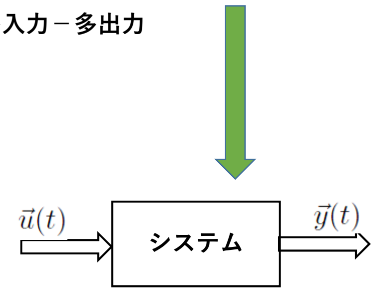
3

制御系

状態方程式の利点：多入力、多出力系を表すことができる



$$
\begin{aligned}
\text{入力変数}\vec{u}(t) &= \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_l(t) \end{bmatrix}^T \\
\text{出力変数}\vec{y}(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_m(t) \end{bmatrix}^T \\
\text{状態変数}\vec{x}(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

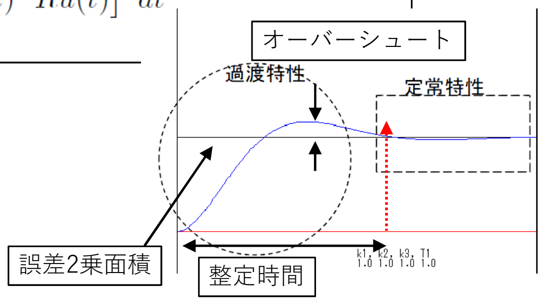


$$
\begin{aligned}
\text{状態方程式：}\quad \dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \\
\text{出力方程式:：}\quad \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t)
\end{aligned}
$$

状態方程式の利点

1. 多入力、多出力系を表すことができる。
2. 初期値の影響が表せる。
3. 安定性判定が固有値計算で出来る。
4. 過渡応答の計算が指数関数で出来る。
5. 可制御、可観測が定義できる。
6. システムの非可制御、非可観測の部分も表現できる
7. 最適レギュレータが設計できる→誤差2乗面積：最小

$$J = \int_0^\infty \left[\vec{x}(t)^T Q \vec{x}(t) + \vec{u}(t)^T R \vec{u}(t)\right] dt$$



伝達関数→微分方程式→状態方程式

伝達関数：<u>初期値＝0</u>→微分方程式→状態方程式

しかし、状態方程式では、初期値の場合も考えることができる。
（ラプラス変換による微分方程式の解き方：初期値が出てくる。

初期値の項

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t) \longrightarrow G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} + \frac{K(s)}{D(s)}$$

$$(D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)$$

伝達関数→微分方程式→状態方程式
（分子が定数）

$$
\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}
$$

$$
\begin{aligned}
(s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1)Y(s) &= b_0 U(s) \ \leftarrow \ \text{Laplace 逆変換} \\
\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) &= b_0 u(t)
\end{aligned}
$$

状態変数の定義：

$$
\begin{aligned}
y(t) &= x_1 \\
\frac{dy(t)}{dt} &= x_2 = \dot{x}_1 \\
\frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= x_3 = \dot{x}_2 \\
\vdots &= \vdots \\
\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} &= x_n = \dot{x}_{n-1} \\
\dot{x}_n &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_n x_n + b_0 u \\
y(t) &= y = x_1
\end{aligned}
$$

必ず状態変数として
何を選ぶか書く

行列形式へ書き直す：

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

状態方程式

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

出力方程式

伝達関数→微分方程式→状態方程式

（分子が多項式）

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \left(\frac{1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}\right)(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \left(\frac{V(s)}{U(s)}\right)\left(\frac{Y(s)}{V(s)}\right) \leftarrow \text{ダミー変数 } V(s) \text{ を導入}$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1}$$

$$(s^n + a_n s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1)V(s) = U(s) \leftarrow \text{Laplace 逆変換}$$

$$\frac{d^n v(t)}{dt^n} + a_n \frac{d^{n-1}v(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{dv(t)}{dt} + a_1 v(t) = u(t)$$

状態変数を定義：

$$
\begin{aligned}
v(t) &= x_1 \\
\frac{dv(t)}{dt} &= x_2 = \dot{x}_1 \\
\frac{d^2v(t)}{dt^2} &= x_3 = \dot{x}_2 \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\
\frac{d^{n-1}v(t)}{dt^{n-1}} &= x_n = \dot{x}_{n-1} \\
\frac{d^n v(t)}{dt^n} &= \dot{x}_n
\end{aligned}
$$

必ず状態変数として
何を選ぶか書く

$$\dot{x}_n = -a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n + u \qquad (27)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{V(s)} &= b_ns^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1s + b_0 \\
Y(s) &= (b_ns^n + b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_1s + b_0)V(s) \ \leftarrow \ \text{Laplace 逆変換} \\
y(t) &= b_n\frac{d^nv(t)}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}v(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1\frac{dv(t)}{dt} + b_0v(t) \\
y &= b_n\dot{x}_n + b_{n-1}x_n + \cdots + b_1x_2 + b_0x_1 \ \leftarrow \text{(27) より } \dot{x}_n \text{ を代入する。} \\
y &= b_n(-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n + u) + b_{n-1}x_n + \cdots + b_1x_2 + b_0x_1
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$y = (b_0 - b_na_1)x_1 + (b_1 - b_na_2)x_2 + \cdots + (b_{n-1} - b_na_n)x_n + b_nu$$

行列形式:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_1 & b_1 - b_n a_2 & \ldots & b_{n-2} - b_n a_{n-1} & b_{n-1} - b_n a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u$$

$b_n = 0$ の場合、出力式：

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

伝達関数→微分方程式→状態方程式：**例題**

伝達関数：
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{(s+1)(s+2)}$$

微分方程式：
$$\begin{aligned}(s+1)(s+2)Y(s) &= 3U(s)\\ (s^2+3s+2)Y(s) &= 3U(s)\\ \ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t) &= 3u(t)\end{aligned}$$

状態変数： $x_1 = y,\ x_2 = \dot{y}$

必ず状態変数として何を選ぶか書く

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -2x_1-3x_2+3u\end{aligned}$$

状態方程式

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}u\\ y &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

伝達関数→微分方程式→状態方程式：**例題**

伝達関数：
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

微分方程式
$$\begin{aligned}(s+1)(s+2)Y(s) &= (s+3)U(s)\\ (s^2+3s+2)Y(s) &= (s+3)U(s)\\ \ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t) &= \dot{u}+3u(t)\end{aligned}$$

状態変数： $x_1 = y,\ x_2 = \dot{y}$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -2x_1-3x_2+\dot{u}+3u\end{aligned}$$

状態方程式

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y &= \begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

状態方程式→伝達関数

$$\begin{array}{llll} \text{状態方程式：} & \dot{\vec{x}}(t) & = & A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \\ \text{出力方程式:：} & \vec{y}(t) & = & C\vec{x}(t) \end{array}$$

初期値＝０としている

$$\begin{array}{lllll} \text{ラプラス変換} & \text{状態方程式} & sX(s) & = & AX(s) + BU(s) \\ & \text{出力方程式} & Y(s) & = & CX(s) \end{array}$$

$X(s)$ でまとめる $sX(s) - AX(s) = BU(s) \rightarrow (sI - A)X(s) = BU(s)$

$X(s)$ でまとめる $X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$

$$\begin{array}{llll} \text{出力方程式へ代入} & Y(s) & = & \{C(sI - A)^{-1}\}BU(s) \\ \text{伝達関数}\underline{\text{行列}} & G(s) & = & \dfrac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B \end{array}$$

多入力多出力

第2回の講義資料参照

状態方程式→伝達関数：例題

多入出力システム、

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

においては、伝達関数行列は

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 & 1/s^2 \\ 0 & 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 0 & 1/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^3} & \dfrac{3}{s} \\ \dfrac{(s+1)(s+2)}{s^3} & \dfrac{2}{s} \end{bmatrix}$$

状態方程式の応答

$$\boxed{\begin{array}{lrcl} \text{状態方程式：} & \dot{\vec{x}}(t) & = & A\vec{x}(t)+B\vec{u}(t) \\ \text{出力方程式:：} & \vec{y}(t) & = & C\vec{x}(t) \end{array}}$$

$\boxed{\text{初期値 } \vec{x}(0)}$

定数変化法にて解く

同次微分方程式の解：$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) \xrightarrow{\text{解}} \vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}(0)$

（自由システム）

e^{At} **：状態推移行列（遷移行列）**

$\vec{u} \equiv 0$ のとき

微分方程式の一般解：$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}(0) + e^{At}\vec{z}(t),\ \ \underline{\vec{z}(0) = \vec{0}}$

$\vec{x}(t)$を微分して状態方程式に代入する。
状態方程式を満たすように$\vec{z}(t)$を求める。

$$\cancel{Ae^{At}\vec{x}(0)} + \cancel{Ae^{At}\vec{z}(t)} + e^{At}\dot{\vec{z}}(t) = \cancel{Ae^{At}\vec{x}(0)} + \cancel{Ae^{At}\vec{z}(t)} + B\vec{u}(t)$$

$\dot{\vec{z}}(t) = e^{-At}B\vec{u}(t)$ 積分をする。 $\Rightarrow$ $\vec{z}(t) = \int_0^t e^{-A\tau}B\vec{u}(\tau)\,d\tau$

よって、

$$\boxed{\vec{x}(t) = e^{At}\left[\vec{x}(0) + \int_0^t e^{-A\tau}B\vec{u}(\tau)\,d\tau\right] = e^{At}\vec{x}(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}B\vec{u}(\tau)\,d\tau}$$

状態方程式の応答

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \vec{x}(t) & = & e^{At}\vec{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\vec{u}(\tau)\,d\tau \\ \vec{y}(t) & = & Ce^{At}\vec{x}(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\vec{u}(\tau)\,d\tau \end{array}}$$

推移行列 e^{At} を求める方法？ (次のスライド)

推移行列e^{At}を求める方法

推移行列の定義式：$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \cdots$
よりの求め方があるが、とても計算できない。

推移行列の求め方
1. ラプラス逆変換
2. 行列の対角化
3. 数値計算

1. 推移行列e^{At}をラプラス逆変換で求める

$\boxed{e^{At} = \mathscr{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}}$

教科書p.67

証明： $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$ を Laplace 変換する。

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\dot{\vec{x}}(t)\} &= \mathscr{L}\{A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)\} \\
sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\
X(s) &= (sI-A)^{-1}\vec{x}(0) + (sI-A)^{-1}BU(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}\vec{x}(0) + \mathscr{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}BU(s)\} \quad (*) \\
\vec{x}(t) &= e^{At}\vec{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\vec{u}(\tau)\,d\tau \quad (**)
\end{aligned}$$

$(*)$ と $(**)$ を比較して、

$\boxed{e^{At} = \underline{\mathscr{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}}}$

および

$$\mathscr{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}BU(s)\} = \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\vec{u}(\tau)\,d\tau$$

教科書［例題3－3］参照

2. 推移行列e^{At}を行列対角化で求める

教科書p.63

(1) 状態方程式の行列 A の固有値 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$、固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_n$, モード行列$T=[\boldsymbol{x}_1 \cdots \boldsymbol{x}_n]$を求める。
(2) モード行列Tとその逆行列T^{-1}を求める。
(3) 行列Aを対角化する

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda$$

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

(4)公式

$$\boxed{e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}}$$

証明

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \cdots + \frac{A^n}{n!}t^n + \cdots \\ &= TT^{-1} + T\Lambda T^{-1}t + \frac{(T\Lambda T^{-1})^2}{2!}t^2 + \frac{(T\Lambda T^{-1})^3}{3!}t^3 + \cdots + \frac{(T\Lambda T^{-1})^n}{n!}t^n + \cdots \\ &= TT^{-1} + T\Lambda T^{-1}t + \frac{T\Lambda^2 T^{-1}}{2!}t^2 + \frac{T\Lambda^3 T^{-1}}{3!}t^3 + \cdots + \frac{T\Lambda^n T^{-1}}{n!}t^n + \cdots \\ &= T\left(I + \Lambda t + \frac{\Lambda^2}{2!}t^2 + \frac{\Lambda^3}{3!}t^3 + \cdots + \frac{\Lambda^n}{n!}t^n + \cdots\right)T^{-1} = Te^{\Lambda t}T^{-1} \end{aligned}$$

(5)Λは対角行列より、

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}$$

23

$e^{\Lambda t}$から $e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$を求める

可制御性、可観測性

状態方程式：	$\dot{\vec{x}}(t)$	$=$	$A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$
出力方程式:：	$\vec{y}(t)$	$=$	$C\vec{x}(t)$

可制御：入力$\vec{u}(t)$により、有限時間で制御系の状態 $\vec{x}(0)$から任意の状態 $\vec{x}_1(t)$ へ制御できること

可観測：出力$\vec{y}(t)$ から制御系の現在の状態（$\vec{x}(0)$を含む）唯一に決定できること

可制御、可観測の判定（<u>必要十分条件</u>）

入力変数： $\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_m(t) \end{bmatrix}^T$

出力変数： $\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_l(t) \end{bmatrix}^T$

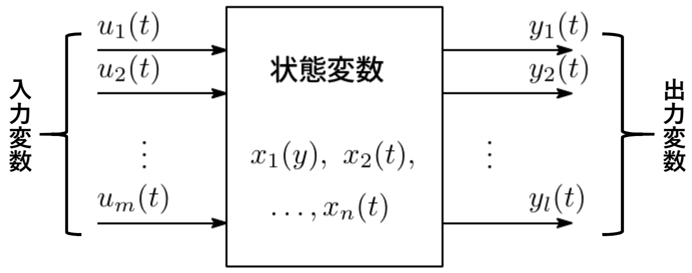
状態変数： $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}^T$

可制御：合成行列

$$U_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

（$U_c\,[n \times nm]$）

のランクが n であること。また、$m=1$ $(B=\vec{b})$ のとき $|U_c| = n$ となる。



多入力－多出力

可観測：合成行列

$$U_0 = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \cdots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

（$U_0[nl \times n]$）

のランクが n であること。また、$l=1$ $(C=\vec{c})$ のとき $|U_o| = n$ となる。

可制御、可観測の判定（例題）

多入力出力システム、

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

において可制御性・可観測性を求めよ。

可制御判定： $U_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\mathrm{rank}(U_c) = 3 \Rightarrow$ 可制御

計算を確認すること！

$$U_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$\mathrm{rank}(U_o) = 3$

$\Rightarrow$ 可観測

状態変数変換(座標変換)とシステムの等価性

状態方程式： $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$
出力方程式:： $\vec{y}(t) = C\vec{x}(t)$

$\vec{x}(t) = T\vec{z}(t) \rightarrow \vec{z}(t) = T^{-1}\vec{x}(t)$

T：状態変換行列

$$
\begin{aligned}
T\dot{\vec{z}}(t) &= AT\vec{z}(t) + B\vec{u}(t) \\
\vec{y}(t) &= CT\vec{z}(t)
\end{aligned}
$$

状態方程式に代入

両辺に T^{-1} をかける

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{z}}(t) &= T^{-1}AT\vec{z}(t) + T^{-1}B\vec{u}(t) \\
\vec{y}(t) &= CT\vec{z}(t)
\end{aligned}
$$

$\tilde{A} = T^{-1}AT,\ \tilde{B} = T^{-1}B,\ \tilde{C} = CT$ とし

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{z}}(t) &= \tilde{A}\vec{z}(t) + \tilde{B}\vec{u}(t) \\
\vec{y}(t) &= \tilde{C}\vec{z}(t)
\end{aligned}
$$

等価変換：

1. $|sI - A| = |sI - \tilde{A}|$
2. $C(sI - A)^{-1}B = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$
3. $\mathrm{rank}(U_c) = \mathrm{rank}(\tilde{U}_c),\quad \mathrm{rank}(U_o) = \mathrm{rank}(\tilde{U}_o)$

状態変数変換(座標変換)とシステムの等価性

等価変換の証明：

1. $|sI - A| = |sI - \tilde{A}|$

 証明： $|sI - \tilde{A}| = |T^{-1}(sI - A)T| = |T^{-1}||T||sI - A| = |sI - A|$

2. $C(sI - A)^{-1}B = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$

 証明： $\tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = CT\left[T^{-1}(sI - A)T\right]^{-1}T^{-1}B = C(sI - A)^{-1}B$

3. $\mathrm{rank}(U_c) = \mathrm{rank}(\tilde{U}_c),\quad \mathrm{rank}(U_o) = \mathrm{rank}(\tilde{U}_o)$

 証明：

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}_c &= \left[\ \tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}\ \right] \\
\tilde{A}^i &= T^{-1}ATT^{-1}ATT^{-1}AT\cdots T^{-1}AT = \underline{T^{-1}A^iT} \\
\tilde{U}_c &= \left[\ T^{-1}B \quad T^{-1}AT\cdot T^{-1}B \quad \cdots \quad T^{-1}A^{n-1}T\cdot T^{-1}B\ \right] \\
&= T^{-1}\left[\ B \quad AB \quad \cdots \quad A^{-1}B\ \right] = T^{-1}U_c
\end{aligned}
$$

 よって、$\mathrm{rank}(U_c) = \mathrm{rank}(T^{-1}\tilde{U}_c)$

$\mathrm{rank}(U_o) = \mathrm{rank}(\tilde{U}_o)$
の証明は省略

1入力1出力システムの正準形式とその応用

- 対角正準形式
- 可制御正準形式
- 可観測正準形式

対角正準形式

状態方程式： $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$

出力方程式:： $\vec{y}(t) = C\vec{x}(t)$

行列 A の特性方程式 $|sI - A| = s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1 = 0$

根 :$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$(\lambda_i I - A)\vec{v}_i = 0,\ \lambda_i \neq \lambda_j,\ \forall i,j$ において$\vec{v}_i$が線形独立

$T = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ ：対角変換行列 ⇒ $\vec{x}(t) = T\vec{z}(t) \rightarrow \vec{z}(t) = T^{-1}\vec{x}(t)$

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{z}}(t) &= T^{-1}AT\vec{z}(t) + T^{-1}B\vec{u}(t) \\
\vec{y}(t) &= CT\vec{z}(t)
\end{aligned}
$$

⇒ $\tilde{A} = T^{-1}AT,\ \tilde{B} = T^{-1}B,\ \tilde{C} = CT$ とし

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{z}}(t) &= \tilde{A}\vec{z}(t) + \tilde{B}\vec{u}(t) \\
\vec{y}(t) &= \tilde{C}\vec{z}(t)
\end{aligned}
$$

⇒

$$
\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \cdots & \tilde{c}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}^T
$$

対角正準形式

n 個の並列システム：

$$\begin{array}{rcl} \dot{z}_i & = & \lambda_i z_i + \tilde{b}_i u, \ i = 1, \ldots n \\ y & = & \tilde{c}_1 z_1 + \tilde{c}_2 z_2 + \cdots + \tilde{c}_n z_n \end{array}$$

伝達関数：

$$\begin{array}{rcl} G(s) & = & \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \vec{c}(sI - A)^{-1}\vec{b} \\ & = & \tilde{\vec{c}}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{\vec{b}} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{c}_i \tilde{b}_i}{s - \lambda_i} \end{array}$$

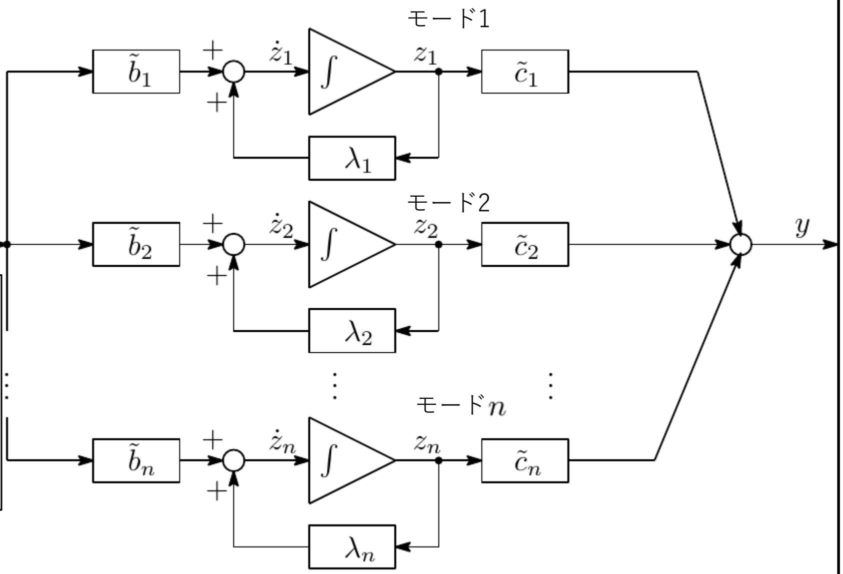


Figure 2: 対角正準システム

対角正準形式とモード解析

$\vec{u} \equiv 0$ のとき $z_i(t) = e^{\lambda_i t} z_i(0)$

状態変数の**モード展開：**

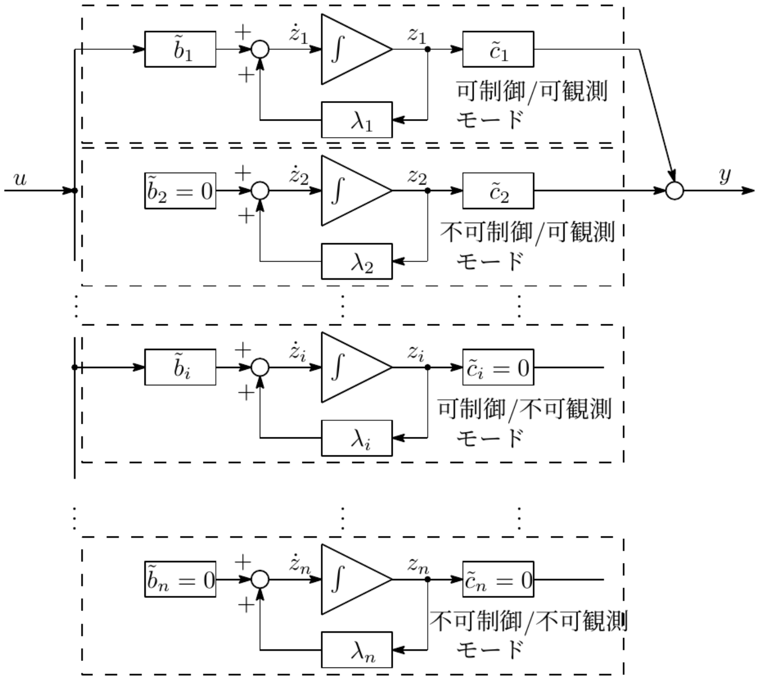
$$\vec{x}(t) = T\vec{z}(t) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} z_1(t) + \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} z_2(t) + \cdots + \vec{v}_n e^{\lambda_n t} z_n(t)$$

可制御性・可観測性の必要十分条件：

可制御： $\tilde{b}_i \neq 0$

可観測： $\tilde{c}_i \neq 0, \quad \forall i$



可制御性準形式

$$
\boxed{\begin{array}{lrcl} \text{状態方程式：} & \dot{\vec{x}}(t) & = & A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \\ \text{出力方程式:：} & \vec{y}(t) & = & C\vec{x}(t) \end{array}}
$$

行列 A の特性方程式 $\quad |sI - A| \quad = \quad s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1 = 0$

$\vec{x}(t) \quad = \quad T\vec{z}(t) \ \rightarrow \ \vec{z}(t) = T^{-1}\vec{x}(t)$ $\qquad$ T：状態変換行列

$$
T \quad = \quad U_c W = \left[\begin{array}{cccc} \vec{b} & A\vec{b} & \cdots & A^{n-1}\vec{b} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccccc} a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_n & 1 & 0 \\ a_4 & a_5 & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & & \\ a_n & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\cdots & \end{array} \right]
$$

可制御性準形式

$$
\tilde{A} \quad = \quad T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & \cdots & -a_n \end{array} \right]; \qquad \tilde{\vec{b}} \quad = \quad T^{-1}\vec{b} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]
$$

$$
\tilde{\vec{c}} \quad = \quad \vec{c}T = \left[\begin{array}{cccc} \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \cdots & \tilde{c}_n \end{array} \right]
$$

可制御正準システム

$$
\left[\begin{array}{c} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & \cdots & -a_n \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right] u
$$

$$
y \quad = \quad \left[\begin{array}{cccc} \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \cdots & \tilde{c}_n \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{array} \right]^T
$$

可観測性準形

$$
\begin{aligned}
\text{状態方程式：} \quad \dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \\
\text{出力方程式:：} \quad \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t)
\end{aligned}
$$

行列 A の特性方程式 $\quad |sI - A| = s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s + a_1 = 0$

$$
\begin{aligned}
\vec{z}(t) &= S\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}(t) = S^{-1}\vec{z}(t) \\
S^{-1}\dot{\vec{z}}(t) &= AS^{-1}\vec{z}(t) + \vec{b}u(t) \\
y(t) &= \vec{c}S^{-1}\vec{z}(t) \\
\dot{\vec{z}}(t) &= SAS^{-1}\vec{z}(t) + S\vec{b}u(t) \\
y(t) &= \vec{c}S^{-1}\vec{z}(t) \\
\tilde{A} &= SAS^{-1}, \quad \tilde{\vec{b}} = S\vec{b}, \quad \tilde{\vec{c}} = \vec{c}S^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
S = WU_o = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & 1 \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_n & 1 & 0 \\ a_4 & a_5 & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & & \\ a_n & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{c} \\ \vec{c}A \\ \vec{c}A^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{c}A^{n-1} \end{bmatrix}
$$

可観測性準形

$$
\tilde{A} = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} ; \quad \tilde{\vec{b}} = S\vec{b} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix}
$$

$$
\tilde{\vec{c}} = \vec{c}S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}
$$

可観測正準システム

$$
\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}^T
$$

例題：

次のシステムについて次のことを求めよ。

1. 可制御性・可観測性の判定
2. 対角正準形式
3. 可制御正準形式
4. 可観測性準形への変換

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

1. 可制御性・可観測性の判定

$$U_c = \begin{bmatrix} \vec{b} & A\vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow |U_c| = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{可制御}$$

$$U_0 = \begin{bmatrix} \vec{c} \\ \vec{c}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow |U_o| = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{可観測}$$

例題：

2. 対角正準形式

対角変換行列 T を求める。

$$A\text{の特性方程式}: |sI - A| = \begin{vmatrix} s-2 & 1 \\ -2 & s-5 \end{vmatrix} = s^2 - 7s + 12,\quad \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 3$$

固有ベクトル

$$|\lambda_1 I - A|\vec{v}_1 = 0,\ \begin{bmatrix} \lambda_1 - 2 & 1 \\ -2 & \lambda_1 - 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0,\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{matrix} 2\alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha - \beta = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{matrix} \rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

$$|\lambda_2 I - A|\vec{v}_2 = 0,\ \begin{bmatrix} \lambda_2 - 2 & 1 \\ -2 & \lambda_2 - 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = 0,\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = 0,$$

$$\begin{matrix} \gamma + \delta = 0 \\ 2\gamma + 2\delta = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \gamma = 1 \\ \delta = -1 \end{matrix} \rightarrow \boxed{\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$$\text{対角変換行}: T = \boxed{\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},\quad T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

例題:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\tilde{\vec{b}} = T^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\vec{c}} = \vec{c}T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

対角正準システム：

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

例題:

3. 可制御正準形式

A の特性方程式：$|sI - A| = \begin{vmatrix} s-2 & 1 \\ -2 & s-5 \end{vmatrix} = s^2 - 7s + 12 (= s^2 + a_2 s + a_1)$

変換行列：$T = U_c W = \begin{bmatrix} \vec{b} & A\vec{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$T^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & 7 \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\tilde{\vec{b}} = T^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\vec{c}} = \vec{c}T = \begin{bmatrix} -7 & 1 \end{bmatrix}$$

可制御正準システム：

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

例題:

4. 可観測性準形への変換

$$A\text{の特性方程式}:|sI-A| = \begin{vmatrix} s-2 & 1 \\ -2 & s-5 \end{vmatrix} = s^2-7s+12(=s^2+a_2s+a_1)$$

$$\text{変換行列}:S = WU_o = \begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{c} \\ \vec{c}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = SAS^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\left(= \begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ 1 & -a_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\tilde{\vec{b}} = S\vec{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \tilde{\vec{c}} = \vec{c}S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可観測正準システム：

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$