演習問題I(平成16 年10 月26 日)

1. 次の分離形微分方程式を解け。

   (a) $y' = ky$

   (b) $y' = y\cot x$

   (c) $y' = 3x^2 y$

   (d) $y' + ay + b = 0$

   (e) $y' = e^x y^3$

   (f) $y' = \sqrt{1-y^2}$

   解答：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy &= dx \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy &= \int dx \\
\arcsin y &= x + c \\
y &= \sin(x+c)
\end{aligned}$$

2. 関数 $\mu(\cdot))$ は積分因子であることを確かめ、微分方程式を解きなさい。

   (a) $2ydx + xdy = 0, \quad \mu(x) = x$

   (b) $xdy - ydx = 0, \quad \mu(x) = \frac{1}{x^2}$

   (c) $\sin ydx + \cos ydy = 0, \quad \mu(x) = e^x$

   (d) $y^2dx + (1+xy)dy = 0, \quad \mu(x,y) = e^{xy}$

   解答：

$$\begin{aligned}
e^{xy}y^2\,dx + e^{xy}(1+xy)\,dy &= 0 \\
P_y &= [e^{xy}y^2]_y = 2ye^{xy} + xy^2e^{xy},\ Q_x = 2ye^{xy} + xy^2e^{xy}\ \text{完全 DE} \\
u &= \int e^{xy}(1+xy)\,dy + l(x) \\
u &= \int e^{xy}\,dy + \int xye^{xy}\,dy + l(x) \\
&= \frac{1}{x}e^{xy} + ye^{xy} - \int e^{xy}\,dy + l(x) \\
&= \frac{1}{x}e^{xy} + ye^{xy} - \frac{1}{x}e^{xy} + l(x) \\
&= ye^{xy} + l(x) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= y^2e^{xy} + l'(x) = P(x) = y^2e^{xy}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
l'(x) &= 0 \\
l(x) &= c \\
u &= ye^{xy} + c
\end{aligned}
$$

3. 次の微分方程式の解を求めよ。

   (a) $y(x+y+1)\,dx + x(x+3y+2)\,dy = 0$

   (b) $(2x-5y)\,dx + (4x-y)\,dy = 0, \quad y(1) = 4$

   (c) $x(2x^2+y^2) + y(x^2+2y^2)y' = 0$

   (d) $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)\,dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)\,dy = 0$

   (e) $(2xy-3)\,dx + (x^2+4y)\,dy = 0, \quad y(1) = 2$

注：微分方程式の解を得てから必ず解を微分方程式に代入して、式が満たされるのかを確認すること。