

システム制御特論 春火3、担当 クルモフ

第1回演習問題 4月22日出題

提出×切：令和7年5月13日(火)

学籍 番号		
氏 名		

1. 次の行列の行列式及び特性方程式 ($|sI - A|$) を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

解答：行列式を求めるため、零の数の多い2列目に対して、列展開をする。

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ |A| &= -1 \end{aligned}$$

次に、特性方程式を求める。

$$\begin{aligned} |sI - A| &= \begin{vmatrix} s & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & - & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} & - & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} s-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & s & -1 & -7 \\ 0 & 0 & s-2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & s-2 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{1列目で展開} \\ &= (-1)^{1+1} \times (s-1) \times \begin{vmatrix} s & -1 & -7 \\ 0 & s-2 & -3 \\ 0 & -1 & s-2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & s-2 & -3 \\ 0 & -1 & s-2 \end{vmatrix} \\ &= (s-1) \times s \times \begin{vmatrix} s-2 & -3 \\ -1 & s-2 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} s-2 & -3 \\ -1 & s-2 \end{vmatrix} \\ &= s(s-1)((s-2)^2 - 3) - ((s-2)^2 - 3) \\ &= s(s-1)(s^2 - 4s + 1) - (s^2 - 4s + 1) \\ &= s^4 - 4s^3 + s^2 - s^3 + 4s^2 - s - s^2 + 4s - 1 \\ &= s^4 - 5s^3 + 4s^2 + 3s - 1 \end{aligned}$$

2. 次の行列の逆行列を求めよ。 $AA^{-1} = I$ より、解答を確認せよ。

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

解答：

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|}$$

まず、行列式 $|A|$ を求める。

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \times (-4) \times \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ |A| &= -16 \end{aligned}$$

次に、余因子行列を計算する。

$$\begin{aligned} \text{adj}A &= \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix}^T \\ \text{adj}A &= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ゆえに、

$$A^{-1} = -\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

逆行列の計算が正しくできているか確認をする。

$$AA^{-1} = -\frac{1}{16} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 次の微分方程式の解を求めよ。解が微分方程式を満たすことを示せ。

(a) $y' + 3y = 0$

解答：分離形微分方程式として解く。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} + 3y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -3y \\ \frac{1}{y} dy &= -3 dx \\ \int \frac{1}{y} dy &= -3 \int dx + c \\ \ln |y| &= -3x + c \\ y &= \pm e^{-3x+c} \\ &= \pm e^c e^{-3x} \leftarrow C = \pm e^c \\ y(x) &= C e^{-3x}\end{aligned}$$

(b) $y' + 3y = x, \quad y(0) = 1$

解答：

i. 同次微分方程式の解を求める。

前問参照

$$u(x) = C e^{-3x}$$

ii. 一般解を求める。

$$\begin{aligned}y(x) &= C e^{-3x} + C(x) e^{-3x} \\ y'(x) &= -3C e^{-3x} + C'(x) e^{-3x} - 3C(x) e^{-3x} \\ -3C e^{-3x} + C'(x) e^{-3x} - 3C(x) e^{-3x} + 3C e^{-3x} + 3C(x) e^{-3x} &= x \\ C'(x) e^{-3x} &= x \\ C'(x) &= x e^{3x} \\ C(x) &= \int x e^{3x} dx \\ C(x) &= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \\ y(x) &= C e^{-3x} + \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}\end{aligned}$$

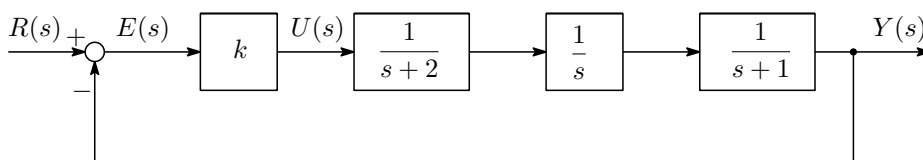
iii. 特殊解を求める。初期値より、

$$y(x) = C e^{-3x} + \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}$$

$$y(0) = 1 = C - \frac{1}{9} \rightarrow C = \frac{10}{9}$$

$$y(x) = \frac{10}{9} e^{-3x} + \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x}$$

4. 次のブロックの $R(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数を求めよ。最終値定理を用いて、 $y(\infty)$ を求めよ。ただし、目標入力 $R(s)$ はステップ関数とする。



解答：

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s} \frac{1}{s+2} k (R(s) - Y(s))、よって \left\{ 1 + \frac{k}{s(s+1)(s+2)} \right\} Y(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)} R(s)$$

$$Y(s) = \frac{\frac{k}{s(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{k}{s(s+1)(s+2)}} R(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2) + k} R(s) = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 2s + k} R(s)$$

$(s^3 + 3s^2 + 2s + k)Y(s) = kR(s) \leftarrow$ 初期値はすべて0として、ラプラス逆変換を行うと

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + ky = kr$$
