微分方程式：概要

クルモフ　バレリー

1　基本的な定義、用語

関数 $y = y(x)$ とその導関数 $y'(x), y''(x), y'''(x), \cdots$ などと独立変数 x を含む方程式を**微分方程式**という。たとえば、

$$\frac{dy}{dx} + 3y + x = 0, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 3\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2y = x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{dy}{dx} - y = \cos x$$

などはその例である。

たとえば、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

は**編微分方程式**である。

関数 $y = y(x)$ を**未知関数**、x を**独立変数**という。上の微分方程式をそれぞれ**1階、2階、3階微分方程式**という。つまり、微分方程式に含まれている未知関数の導関数のうていで n 階導関数 $y^{(n)}$ が最も微分の階数が高いものであれば、この微分方程式を n 階微分方程式という。

常微分方程式 と**編微分方程式**。微分方程式は広く科学技術などの分野に使われるだけでなく、医学、社会学、経済学などの分野にもよく使用される。

2　微分方程式の解

微分方程式を満足し、y の導関数 y' を含まない x と y の関係式 $F(x, y) = 0$ をこの微分方程式の**解**という。この解を y について解いて関数 $y = f(x)$ が得られるならば、$y = f(x)$ をこの微分方程式の解ということもある。微分方程式の解 $F(x, u) = 0$ が表す平面上の曲線を**解曲線**という。

例題: 1　微分方程式 $xy' = 2y$ について $y = x^2$ は解であるを確かめよ。

[**解答**] $y = x^2$ の両辺を微分して $y' = 2x$ である。y と y' を微分方程式に代入し、微分方程式は $x(2x) = 2x^2$ の等式となる。したがって、$y = x^2$ は解である。

例題: 2　図 *1* に示されている電気回路での電流を求めよ。

[**解答**] キリヒホフ電圧法則より電圧のつりあいは次のようになる。

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V \tag{1}$$

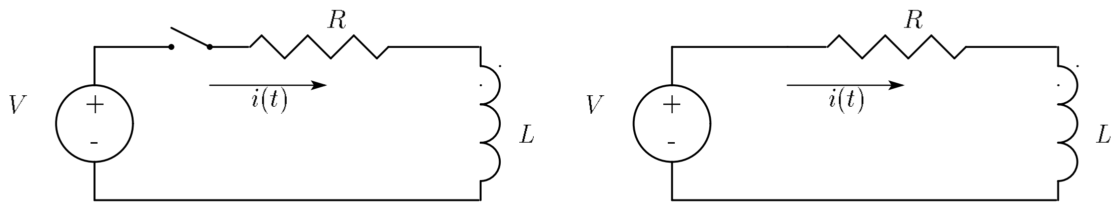

図 1: 例 2 の回路

変数分散を行い、整理し、

$$\frac{Ldi}{V-Ri} = dt \tag{2}$$

積分をすると

$$-\frac{L}{R}\ln(V-Ri) = t+c \tag{3}$$

$$V-Ri = e^{-R(t+c)/L} \tag{4}$$

$$i = \frac{V}{R}+\frac{1}{R}e^{-R(t+c)/L} \tag{5}$$

式 *(5)* は式 *(1)* の解である。

なお、回路から時刻 $t \leq 0$ での電流の値は零であるので *($i(t)$)*、これを式 *(3)* に代入する。

$$-\frac{L}{R}\ln V = c \tag{6}$$

これを上述の式に代入し、

$$-\frac{L}{R}[\ln(V-Ri) - \ln V] = t \tag{7}$$

整理すると解が求まる。

$$\frac{V-Ri}{V} = e^{-Rt/L} \tag{8}$$

$$i = \frac{V}{R}-\frac{V}{R}e^{-Rt/L}, \qquad t>0 \tag{9}$$

微分方程式の解で、$x = x_0$ のとき $y = y_0$ となる解を求めることを、初期条件「$x = x_0,\ y = y_0$」のもとで与えられた微分方程式という。これを 初期値問題 あるいは コーシー問題 ともいう。

１階微分方程式は１つの任意定数 c を含む解 $F(x,y,c) = 0$（または $y = y(x,c)$）をもつ。

n 階微分方程式は n 個の任意定数を含む解をもつ。

このような解を**一般解**という。

一般解 $F(x,y,c) = 0$ において任意定数に特定な値 c_1 を代入すれば、１つの解 $F(x,y,c_1) = 0$ が得られる。このような解を**特殊解**という。

たとえば、１つのパラメータ c を持つ関数の族

$$y(x) = \sin x + c$$

は１階微分方程式

$$y'(x) = \cos x$$

の一般解である。$c = 1$ とおくと、ただ１つの解

$$y(x) = \sin x + 1$$

が決まり、この解は点 (0,1) を通る。平面上に任意に与えられた点 (x_0, y_0) に対し、この点を通る曲線は族の中にただ１つ存在する。(図 2 をみよ。)

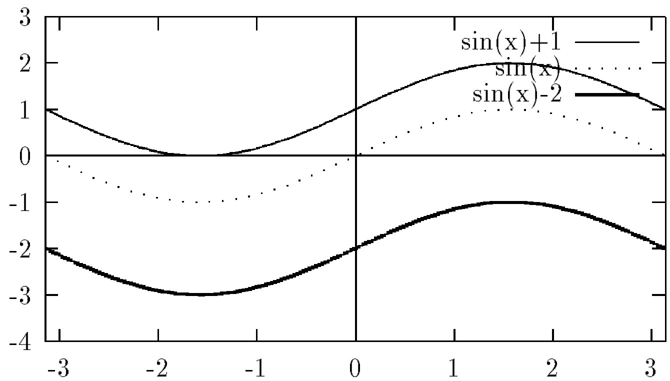

図 2: $y(x) = \sin x + c$

同様に、１つのパラメータ c を持つ関数の族

$$y(x) = ce^x$$

は微分方程式

$$y' = y$$

の解である。$c = -1$ とおけば、ただ１つの解

$$y(x) = -e^x$$

が決まり、この解は点 $(0, -1)$ を通る。平面上に任意に与えられた点 (x_0, y_0) に対し、この点を通る曲線は族の中にただ１つ存在する。（図 3 をみよ。）

1. 陽関数解：開区間 (a, b) 上の独立変数 x を持つ微分方程式の**陽関数解**とは、x の関数 $y = g(x)$ であって、微分方程式の y, y' などに $g(x)$, $g'(x)$ を代入したとき、微分方程式が (a, b) 上で恒等式になるときという。この解は xy 平面で曲線を描く。

   たとえば、c を定数として、関数

   $$y(x) = ce^{3x}$$

   は微分方程式

   $$\frac{dy}{dx} = 3y$$

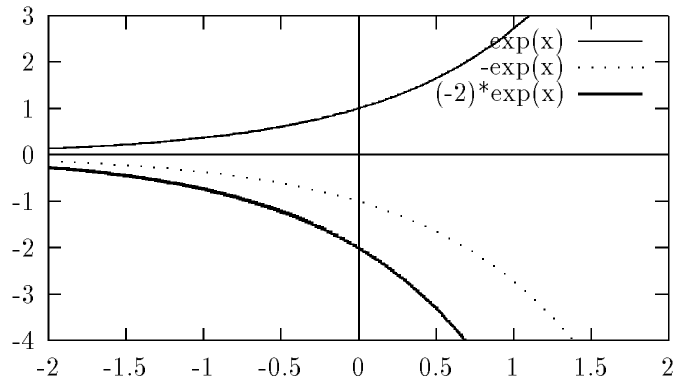

図 3: $y(x) = ce^x$

の陽関数解である。実際、

$$左辺 := y'(x) = 3ce^{3x} 右辺 := 3y(x) = 3ce^{3x}$$

より、任意の x に対し、

$$左辺＝右辺$$

であるから、$(-\infty, \infty)$ 上で恒等式になるからである。

2. 陰関数解：解が $G(x, y) = 0$ の形をした式で定義される曲線であるときという。

たとえば、$r > 0$ を定数として、関数

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad y > 0$$

は微分方程式

$$yy' = -x, \quad -r < x < r$$

の解である。実際、y を x の関数とし、曲線の定義式を x で微分すると、

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - r^2) = \frac{d}{dx}0 = 0$$

であるから

$$2x + 2yy' = 0, すなわち \quad yy' = -x$$

となる。