倒立振子のモデル化

平成 19 年 4 月 24 日

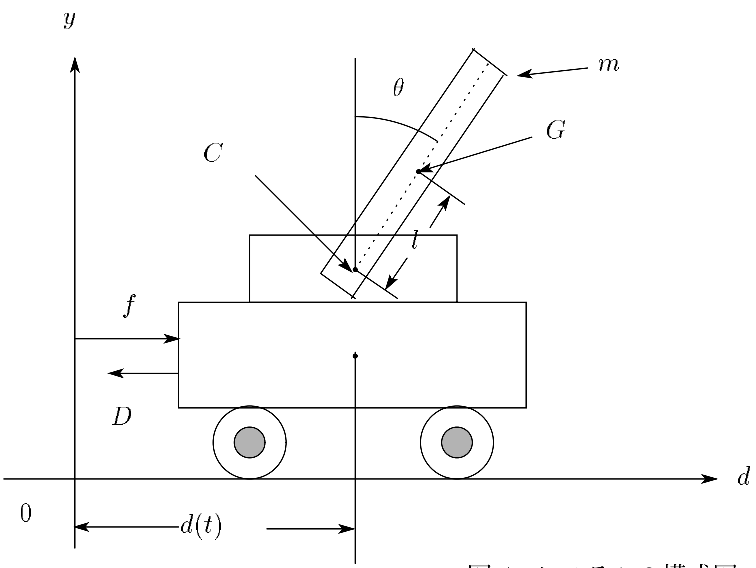

図 1: システムの構成図

$m[kg]$:	振子の質量	$m_c[kg]$:	台車の質量
$c[kg.m^2/s]$:	振子の回転軸の摩擦係数	$D[kg/s]$:	台車の摩擦係数
$\theta[rad]$:	振子の角度	$d[m]$:	台車の変位
$J[kg.m^2]$:	振子の慣性モーメント	$l[m]$:	振子の重心からの長さ
G:	振子の重心		

台車と振子の運動方程式はラグランジュ法により導く。

$$\bar{f} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}}\Big) - \frac{\partial T}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial P}{\partial \dot{\bar{q}}} + \frac{\partial U}{\partial \bar{q}} \tag{1}$$

ここで

T: 運動エネルギー
P: 散逸エネルギー
U: 位置エネルギー
t: 時間
$\bar{q}^T$: $[d, \theta]$
$\dot{\bar{q}}^T$: $[\dot{d}, \dot{\theta}]$
$\bar{f}^T$: $[f_d, 0]$

である。

それぞれのエネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m_c\dot{d}^2(t) + \frac{1}{2}m\{[\dot{d}(t) + l\cos\theta(t)\dot{\theta}(t)]^2 + [-l\sin\theta(t)\dot{\theta}(t)]^2\} + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2(t)$$

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}D\dot{d}^2(t) + \frac{1}{2}c\dot{\theta}(t) \\
U(t) &= mgl\cos\theta(t)
\end{aligned}
$$

と表わされる。ただし振子の重心 G 位置

$$G\{x + l\sin\theta, l\cos\theta\}$$

とする。各エネルギーを微分して、式（1）に代入する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{d}(t)} &= \{m_c + m\}\dot{d}(t) + ml\cos\theta(t)\dot{\theta}(t) \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}(t)} &= ml\dot{d}(t)\cos\theta(t) + ml^2\dot{\theta}(t) + J\dot{\theta}(t) \\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{d}(t)}\Big) &= (m_c + m)\ddot{d}(t) + ml\cos\theta(t)\ddot{\theta}(t) - ml\sin\theta(t)\dot{\theta}^2(t) \\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}(t)}\Big) &= ml\ddot{d}(t)\cos\theta(t) - ml\dot{d}(t)\sin\theta(t)\dot{\theta}(t) + ml^2\ddot{\theta}(t) + J\ddot{\theta}(t) \\
\frac{\partial T}{\partial d(t)} &= 0 \\
\frac{\partial T}{\partial \theta(t)} &= -ml\dot{d}(t)\sin\theta(t)\dot{\theta}(t) \\
\frac{\partial U(t)}{\partial d(t)} &= 0 \\
\frac{\partial U(t)}{\partial \theta(t)} &= -mgl\sin\theta(t) \\
\frac{\partial P}{\partial \dot{d}(t)} &= D\dot{(}t) \\
\frac{\partial P}{\partial \dot{\theta}(t)} &= c\dot{\theta}(t)
\end{aligned}
$$

$$(m_c + m)\ddot{d}(t) + ml\cos\theta(t)\ddot{\theta}(t) - ml\sin\theta(t)\dot{\theta}^2(t) + D\dot{d}(t) = f(t) \tag{2}$$

$$ml\ddot{d}(t)\cos\theta(t) - ml\dot{d}(t)\sin\theta(t)\dot{\theta}(t) + ml^2\ddot{\theta}(t) + J\ddot{\theta}(t) + ml\dot{d}(t)\sin\theta(t)\dot{\theta}(t) - mg\sin\theta + c\dot{\theta}(t) = 0$$

$$ml\cos\theta(t)\ddot{d} + ml^2\ddot{\theta}(t) + J\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) - mgl\sin\theta(t) = 0 \tag{3}$$

(2) 式より

$$(m_c + m)\ddot{d}(t) + ml\cos\theta(t)\ddot{\theta}(t) = ml\sin\theta(t)\dot{\theta}^2(t) - D\dot{d}(t) + f(t) \tag{4}$$

(3) 式より

$$ml\ddot{d}(t)\cos\theta(t) + (ml^2 + J)\ddot{\theta}(t) = mgl\sin\theta(t) - c\dot{\theta}(t) \tag{5}$$

この (4), (5) 式より

$$\begin{bmatrix} mc + m & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & ml^2 + J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ml\sin\theta(t)\dot{\theta}^2(t) - D\dot{d}(t) + f(t) \\ mgl\sin\theta(t) - c\dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

と表わされる。ここで

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ddot{d}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_c + m & ml\cos\theta(t) \\ ml\cos\theta(t) & ml^2 + J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ml\sin\theta(t)\dot{\theta}^2(t) - D\dot{d}(t) + f(t) \\ mgl\sin\theta(t) - c\dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(m_c+m)(ml^2+J) - m^2l^2\cos^2\theta(t)} \begin{bmatrix} ml^2 + J & -ml\cos\theta(t) \\ -ml\cos\theta(t) & m_c + m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ml\sin\theta(t)\dot{\theta}^2(t) - D\dot{d}(t) + f(t) \\ mgl\sin\theta(t) - c\dot{\theta}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ここで

$$J = \frac{1}{3}ml^2$$

また、上記の記述が非線形であるので、次のように線形化できる。$\theta \ll 1(rad) \to \sin\theta(t) = \theta(t), \cos\theta(t) = 1, \dot{\theta}^2(t) = 0$

結果として

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ddot{d}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} &= \frac{1}{\frac{4}{3}(m_c+m)ml^2 - m^2l^2} \begin{bmatrix} \frac{4}{3}ml^2 & -ml \\ -ml & m_c + m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D\dot{d}(t) + f(t) \\ mgl\theta(t) - c\dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \\
&= \frac{3}{ml^2(4m_c+m)} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}ml^2D\dot{d}(t) - m^2l^2g\theta(t) + \frac{4}{3}ml^2f(t) + mlc\dot{\theta}(t) \\ mlD\dot{d}(t) + (m_c+m)mgl\theta(t) - mlf(t) - (m_c+m)c\dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{4D}{4m_c+m}\dot{d}(t) - \frac{3mg\theta(t)}{4m_c+m} + \frac{4}{4m_c+m}f(t) + \frac{3c}{l(4m_c+m)}\dot{\theta}(t) \\ \frac{3D}{l(4m_c+m)}\dot{d}(t) + \frac{3(m_c+m)g}{l(4m_c+m)}\theta(t) - \frac{3}{l(4m_c+m)}f(t) - \frac{3(m_c+m)c\theta(t)}{ml^2(4m_c+m)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となる。また、振子の回転軸がベアリングによって回転しているので、摩擦係数 c を無視できる。$c = 0$ を代入する。

$$\begin{bmatrix} \ddot{d}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4D}{4m_c+m}\dot{d}(t) - \frac{3mg\theta(t)}{4m_c+m} + \frac{4}{4m_c+m}f(t) \\ \frac{3D}{l(4m_c+m)}\dot{d}(t) + \frac{3(m_c+m)g}{l(4m_c+m)}\theta(t) - \frac{3}{l(4m_c+m)}f(t) \end{bmatrix}$$

ここで、状態変数を

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t) \\ \theta(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

とおき $4m_c + m = M$ とおくと、次の式のように表わされる。

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x3(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_4(t) \\
\dot{x}_3(t) &= -\frac{4D}{M}x_3(t) - \frac{3mg}{l}x_2(t) + \frac{4}{m}f(t) \\
\dot{x}_4(t) &= \frac{3D}{Ml}x_3(t) + \frac{3(m_c+m)g}{Ml}x_2(t) - \frac{3}{Ml}f(t)
\end{aligned}$$

まとめると

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3mg}{M} & -\frac{4d}{M} & 0 \\ 0 & \frac{3(m_c+m)g}{Ml} & \frac{3D}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{M} \\ -\frac{3}{Ml} \end{bmatrix} f(t)$$

となる。